利用 Penalty 函數法的 Stokes 流邊界積分方程式

1. 前言

對非壓縮性非黏性的理想流體運動，即勢流(potential flow)，因利用速度勢(velocity potential)的概念，控制方程式通常可以單一線性微分方程式解析，一般為 Laplace 控制方程式，討論非定常非線性問題時，可以線性解為初期值，再利用時間差分取得非線性解，已有為數極多參考文獻，如邊界元素法在海岸工程應用等。另一方面對非壓縮性黏性的流體運動，不如理想流體運動無法以單一線性微分方程式解析，通常必要同時考量非線性連立偏微分方程式。

應用積分方程式的基本解(即所謂邊界元素法)解析 Navier-Stokes 方程式的近似解法有，使用 Oseen 近似及 Stokes 近似為基本解。此外有利用 Penalty 函數法為基本解的 Kelvin 解法。對 2 維流場則有為利用流函數及渦度加以公式化而使用熱勢及對數勢的基本解。本文將針對利用 Penalty 函數法加以說明。

2. 基本方程式

2011 埃及尼羅河之旅

直交座標系(X_1, X_2, X_3)所示 3 維 Euclid 空間，空間領域 Ω 具有封閉曲面 Γ，空間內任意一點的位置，以直交座標 $X_i(X_1, X_2, X_3)$表示。若流體密度 ρ 設為一定，X_i 座標軸方向的流速以 V_i 表示，假定無介質的生成或消失，則依質量守恆法則，可得下列連續方程式。

$$\frac{\partial V_j}{\partial X_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, 3) \tag{1}$$

若假定流體為 Newton 流體，流體內部發生的應力 S_{ij} 與流速 X_i 間有下列關係式成立。

$$S_{ij} = -P\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial V_i}{\partial X_j} + \frac{\partial V_j}{\partial X_i}\right) \tag{2}$$

P 為壓力，δ_{ij} 為 Kronecker 的 Delta 函數，μ 為黏性係數。

若單位質量流體受 K_i 外力作用，依動量 ρV_i 的守恆法則得下列運動方程式。

$$\frac{\partial}{\partial T}(\rho V_i) + \frac{\partial}{\partial X_j}(\rho V_i V_j) = \frac{\partial S_{ij}}{\partial X_j} + \rho K_i \tag{3}$$

T 表示時間函數。

將(1)、(2)式代入(3)式，得下列 Navier-Stokes 方程式。

$$\frac{\partial V_i}{\partial T} + V_j \frac{\partial V_j}{\partial X_i} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial X_i} + \nu\nabla^2 V_i + K_i \qquad (4)$$

$\nu = \mu / \rho$ 為動黏性係數，∇^2 為 Laplacian。

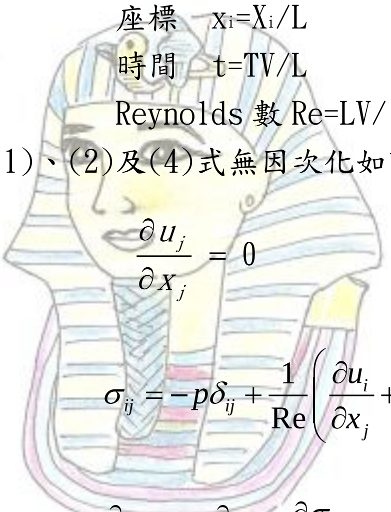
為無因次化，以 L 為代表長度、V 為代表流速，依下列關係：

座標　$x_i = X_i/L$　　　流速　$u_i = V_i/V$

時間　$t = TV/L$　　　壓力　$p = P/(\rho V^2)$

Reynolds 數 $Re = LV/\nu$

將(1)、(2)及(4)式無因次化如下。



戴滿珠寶的駱駝

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \qquad (5)$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad (6)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + G_i \qquad (7)$$

但

$\sigma_{ij} = S_{ij} / \rho V^2$ ，$G_i = (L / V^2) K_i$

2011 埃及尼羅河之旅

若封閉曲面邊界Γ可分成互不重疊的Γu 及Γσ 等 2 部分，Γu 制限流速 u_i、Γσ 制限表面力 σ_i，其邊界條件分別如下

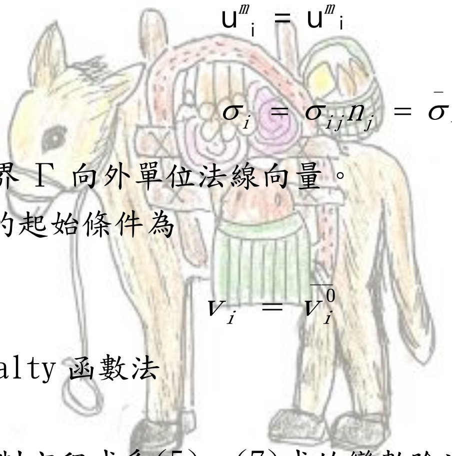
$$u'''_i = \bar{u}'''_i \qquad 在\Gamma u上 \qquad (8)$$

$$\sigma_i = \sigma_{ij} n_j = \bar{\sigma}_i \qquad 在\Gamma\sigma上 \qquad (9)$$

n_j 為邊界 Γ 向外單位法線向量。

0 時刻的起始條件為

$$V_i = \overline{V_i^0}$$



載滿貨品的驢子

3. Penalty 函數法

控制方程式系(5)～(7)式的變數除速度外尚有壓力項，Penalty 函數法是依下述概念，係將壓力項 p 消去，推導出僅與速度有關的積分方程式。首先將 Penalty 參數 λ 依下式設定。

$$p = \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \qquad (k=1, 2, 3) \qquad (10)$$

對極大的正 λ 值，若 p 值為有限值，$\partial u_k/\partial x_k$ 會極趨近於 0，連續方程式(5)式會被近似滿足，將之代入(6)式後再代入(7)式，得下列控制微分方程式。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\lambda\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]+G_i \tag{11}$$

若對時間微分作差分近似，t=tₘ時刻的微分方程式可依下式表示。

$$\left(\lambda+\frac{1}{\mathrm{Re}}\right)\frac{\partial^2 u^m{}_j}{\partial x_j\partial x_i}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u^m{}_i}{\partial x_j{}^2}-\frac{1}{\Delta t}u^m{}_i=-\frac{1}{\Delta t}u^{m-1}{}_i+u_j{}^m\frac{\partial u^m{}_i}{\partial x_j}+G^m{}_i \tag{12}$$

觀察上式左邊發現，它與為求得定常振動解而作 Laplace 變換的線性動彈性體的波動方程式呈同一型式。

採用 Penalty 函數法時的邊界條件如下

$$u^m{}_i=\bar{u}_i^m \qquad 在\Gamma u上 \tag{13}$$

$$\sigma^m{}_i=\left[\lambda\frac{\partial u_k^m}{\partial x_k}\delta_{ij}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial u_i^m}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^m}{\partial x_i}\right)\right]n_j=\bar{\sigma}_i \qquad 在\Gamma\sigma上 \tag{14}$$

作為(12)式的權重殘差表示的權重函數，可使用滿足下列方程式的 Kelvin 基本解張量 u^*_{ik}。

$$\left(\lambda+\frac{1}{\mathrm{Re}}\right)\frac{\partial^2 u^*{}_{jk}}{\partial x_j\partial x_i}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u^*{}_{ik}}{\partial x_j}-\frac{1}{\Delta t}u^*_{ik}=-\delta_{ik}\delta(x-\xi) \tag{15}$$

$\sigma^*{}_{ik}$是依下式定義的$\sigma^*{}_{ijk}$及因$\sigma^*{}_{ik}=\sigma^*{}_{ijk}n_j$的關係而決定。

$$\sigma^*{}_{ijk}=\lambda\frac{\partial u_{ik}^*}{\partial x_i}\delta_{ij}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial u_{ik}^*}{\partial x_j}+\frac{\partial u_{jk}^*}{\partial x_i}\right) \tag{16}$$

$$\sigma^*{}_{ik}=\left[\lambda\frac{\partial u_{ik}^*}{\partial x_i}\delta_{ij}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial u_{ik}^*}{\partial x_j}+\frac{\partial u_{jk}^*}{\partial x_i}\right)\right]n_j$$

將上述基本解張量代入(12)的權重殘差表示，可得任意點ξ的積分方程式如下

$$c_{ik}(\xi)u_i^m(\xi)+\int_\Gamma u_i^m u_{ik}^* d\Gamma=\int_\Gamma \sigma_i^m \sigma_{ik}^* d\Gamma+\int_\Omega\left(\frac{1}{\Delta t}u_i^{m-1}-u_j^m\frac{\partial u_i^m}{\partial x_j}-G_i^m\right)u_{ik}^* d\Omega \tag{17}$$

參考文獻

1. AJ Chorin ：Numerical solution of the Navier-Stokes equations,Mathematics of Computation,Vol.22 No.104,1968.
2. 角田和彦,登坂宣好：境界要素法による粘性流体の解析,第 5 回流れの有限要要素法解析シンポジウム報文集,1984。

3. 角田和彥,登坡宣好：非定常流れの境界要素解所,第1回境界要素法シンポジウム境界要素法發表論文集,1984。
4. Cruse,T.A.and Rizzo,F.J.：A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem-I,J.Math.Analys,1968.
5. 境界要素法の理論と應用：境界要素法研究會,コロナ社,1986
6. 3維邊界積分方程式及其基本解

載滿珠寶的駱駝

2011 埃及尼羅河之旅

載滿貨品的驢子

阿拉丁神燈