

1. 非壓縮性流體連續方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

或

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (j=1, 2, 3)$$



(1.1)

2. 非壓縮性流體運動方程式

非壓縮性流體運動依 Naier-Stokes 方程式所示如下

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X + f v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\nu}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\nu}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = Y - f u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\nu}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\nu}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\nu}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\nu}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (2.3)$$

$\rho$  為流體密度， $u$ 、 $v$ 、 $w$  為  $x$ 、 $y$ 、 $z$  軸方向的流速分量， $p$  為壓力， $g$  為重力加速度、 $\nu$  為流體動黏性係數。 $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  為  $x$ 、 $y$ 、 $z$  軸方向作用外力。通常包含重加，海面風力效應，海底面摩擦效應及波引起剩餘動量即輻射應力等。 $f$  為 Coriolis 參數表示因地球自轉引起對地球上的水平運動( $u, v$ )產生垂直方向( $v, -u$ )的作用力比例參數，地球自轉速度為  $\omega$ ，緯度為  $\varphi$  時， $f=2\omega \sin \varphi$ 。

欲解析非壓縮性黏性流，必須對  $x$ 、 $y$ 、 $z$  軸方向的分速度  $u$ 、 $v$ 、 $w$  及壓力  $p$  等 4 個未知數解連立方程式。自古有 Oseen、Stokes 的近似解法，另有 Penalty 法是設法消去壓力  $p$  項，只解  $u$ 、 $v$ 、 $w$  等 3 個分速度連立方程式的近似解法。此處說明分速度  $u$ 、 $v$ 、 $w$  及壓力  $p$  等 4 個未知數解連立方程式的解法。

載滿貨品的驢子

阿拉丁神燈

3. 沿岸淺水域連續方程式

沿岸附近海域，垂直方向運動與水平方向比較，規模甚小。垂直方向流速且水深變化較小，水平方向流體運動卓越時，可對垂直方向作如下的積分，將

3 維流場簡化成 2 維平面流場。

淺水海域內，在水平面內取直角座標系(x, y), z 軸垂直向上，潮流在 x, y 方向分量為 u, v。流體密度一定不可壓縮流的連續方程式如下

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.1)$$

將上式對水深方向積分得

$$\int_{-h}^{\zeta} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] dz = - \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial w}{\partial z} dz = -w|_{\zeta} + w|_{-h}$$

沿岸淺水域，視其水平速度只為 x, y 的函數，因此可將上式改寫成

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] \int_{-h}^{\zeta} dz = -w|_{\zeta} + w|_{-h} \quad (3.2)$$

$$w|_{\zeta} = \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad (3.3)$$

$$w|_{-h} = -\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial t} - u \frac{\partial h}{\partial x} - v \frac{\partial h}{\partial y} \quad (3.4)$$

將(3.3)、(3.4)式代入(3.2)式得

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] (\zeta + h) = \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial h}{\partial t} - u \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) - v \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} \right)$$

即

$$\frac{\partial (\zeta + h)}{\partial t} + \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} (\zeta + h) + u \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right\} + \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} (\zeta + h) + v \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right\} = 0$$

得淺水域連續方程式如下。

$$\frac{\partial(\zeta+h)}{\partial t} + \frac{\partial u(\zeta+h)}{\partial x} + \frac{\partial v(\zeta+h)}{\partial y} = 0 \quad (3.5)$$

若令  $H = \zeta + h$ ，得

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial uH}{\partial x} + \frac{\partial vH}{\partial y} = 0 \quad (3.6)$$

即

$$\frac{DH}{Dt} + H \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

或

$$\frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} + H \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

若忽略左邊第 1~3 項得 2 維近似淺水域連續方程式如下

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

2011 埃及尼羅河之旅

或

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (j=1, 2) \quad (3.7)$$

下標  $j$  表示對  $j$  的總和。

#### 4. 沿岸淺水域運動方程式

當  $z$  方向只有靜水壓作用，(2.3) 式左邊的水粒子於  $z$  方向加速度與重力加速度相比為小，可忽略不計，即

$$0 = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (4.1)$$

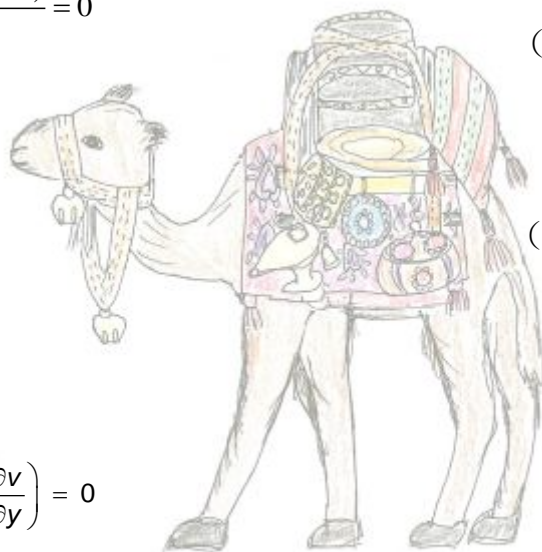
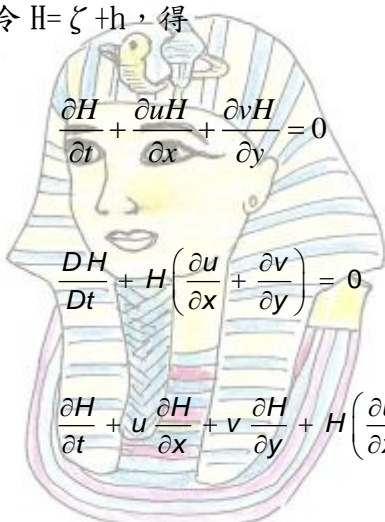
即

$$dp = -\rho g dz$$

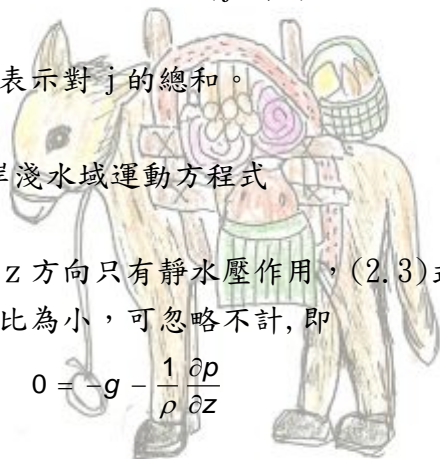
由海底 ( $z = -h$ ) 積分到海面 ( $z = \zeta$ ，水位上昇量) 時，得

$$p = \int_{-h}^{\zeta} \rho g dz = p_0 - g \int_{-h}^{\zeta} \rho dz \quad (4.2)$$

若假定大氣壓力  $p_0$  及海水密度  $\rho$  為一定， $x$ 、 $y$  軸方向的壓力分量為



載滿貨物的駱駝



載滿貨物的驢子



阿拉丁神燈

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial(\zeta + h)}{\partial x} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho g \frac{\partial(\zeta + h)}{\partial y} \quad (4.4)$$

若流體運動的水深方向規模遠小於水平方向，若海底坡度變化小時因此可忽略，若作用力考量波動引起的輻射應力，水面上風吹送引起的水面風力及海底摩擦引起的海底摩擦力。

將(2.1)、(2.2)式以張量形式表示如下，但 Re 為 Reynolds 數。

$$\text{Re} \frac{Du_i}{Dt} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \text{Re} \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} + \text{Re} \rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} = f_i + c_i \quad (4.5)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

$$h_i = -\text{Re} \rho g \frac{\partial h}{\partial x_i}$$

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= W_1 - B_1 + S_{11} + S_{12} \\ f_2 &= W_2 - B_2 + S_{22} + S_{21} \end{aligned} \right\} \text{2011 埃及尼羅河之旅}$$

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= f u_2 \\ c_2 &= -f u_1 \end{aligned} \right\}$$

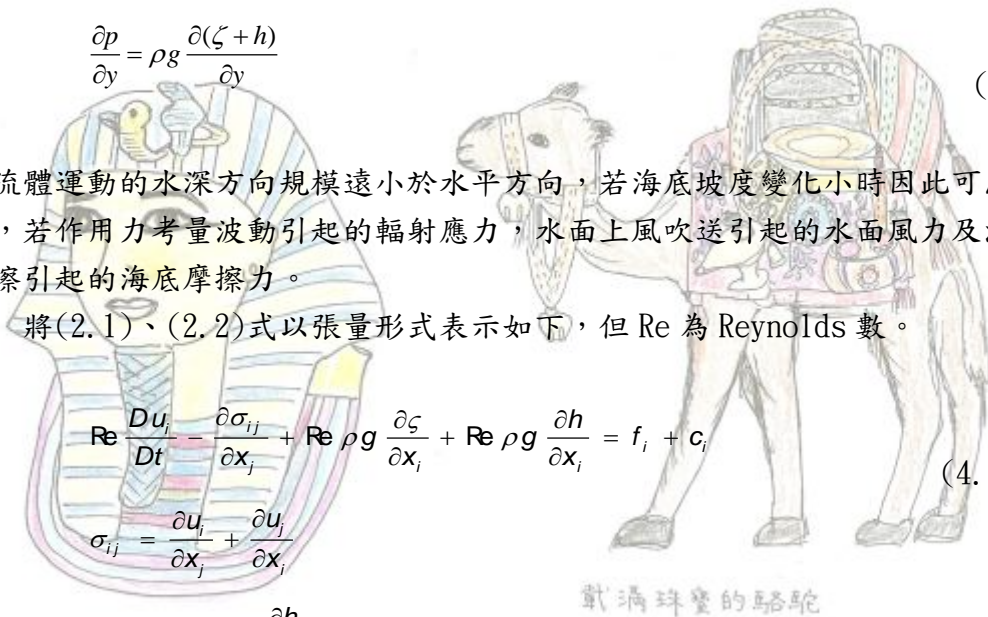
W 為作用於水面的風力，風速為  $U_w$ 、風向與 x 軸呈  $\psi$  角度、風力係數為 K 時，其 x、y 軸分風力分別為  $W_x$ 、 $W_y$  如下

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= K U_w^2 \cos^2 \psi \\ W_2 &= K U_w^2 \sin^2 \psi \end{aligned} \right\}$$

B 為作用於海底的摩擦力，Manning 粗度係數為 n，Chezy 係數  $C_h (= (1/n)h^{1/6})$  時，x、y 軸分摩擦力分別為  $B_x$ 、 $B_y$  如下

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= g \frac{u_1(u_1^2 + u_2^2)^{1/2}}{C_h^2} \\ B_2 &= g \frac{u_2(u_1^2 + u_2^2)^{1/2}}{C_h^2} \end{aligned} \right\} \text{載滿貨品的馬廐子}$$

S 為波動引起的輻射應力，波進行方向與 x 軸呈  $\alpha$  角度，E 為進行波能量(= $\rho g a^2/4$ )、a 為波振幅， $C_g$  及 C 分別為進行波群速度及波速時，輻射應力 S 各成



載滿珠寶的駱駝



載滿貨品的馬廐子



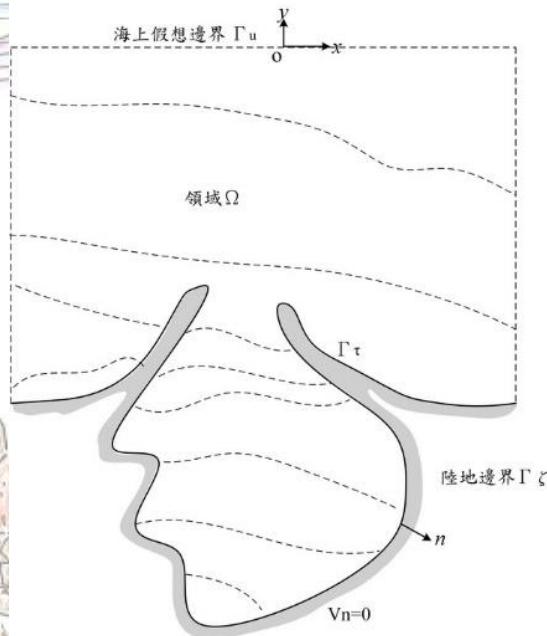
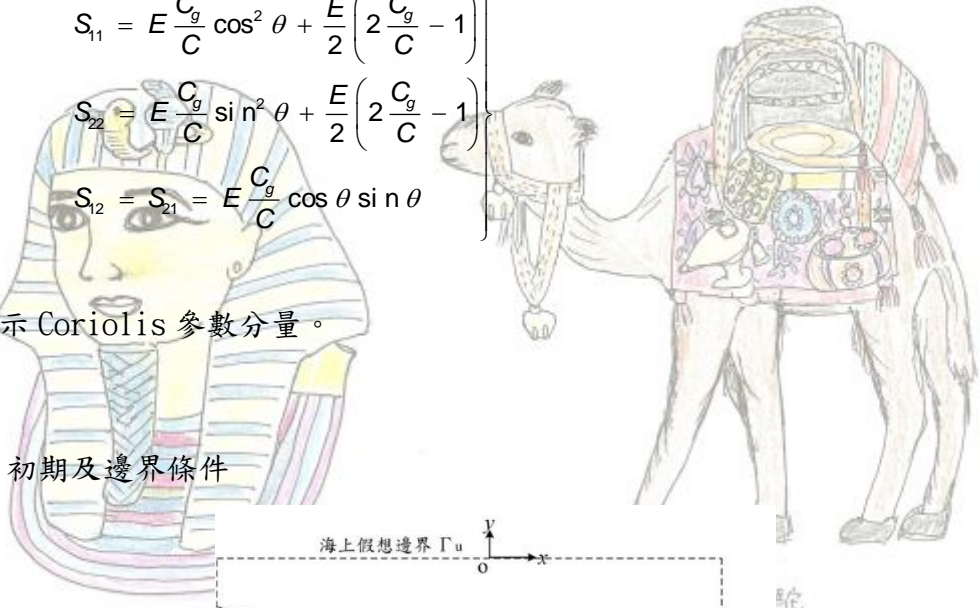
阿拉丁神燈

分可表示如下

$$\left. \begin{aligned} S_{11} &= E \frac{C_g}{C} \cos^2 \theta + \frac{E}{2} \left( 2 \frac{C_g}{C} - 1 \right) \\ S_{22} &= E \frac{C_g}{C} \sin^2 \theta + \frac{E}{2} \left( 2 \frac{C_g}{C} - 1 \right) \\ S_{12} &= S_{21} = E \frac{C_g}{C} \cos \theta \sin \theta \end{aligned} \right\}$$

c 表示 Coriolis 參數分量。

5. 初期及邊界條件



如圖所示，計算領域為  $\Omega$ ，陸上邊界為  $\Gamma_v$ 、海上假想邊界為  $\Gamma_\zeta$ 。邊界上向外單位法線的  $x$ 、 $y$  成分為  $n_1$ 、 $n_2$  時，邊界條件如下。

① 在陸上邊界  $\Gamma_v$

$$u_1 n_1 + u_2 n_2 = \bar{v}_n$$

載滿寶品的驢子

$\bar{v}_n$  為已知值，若邊界切線為  $s$

因

$$\begin{pmatrix} \bar{v}_n \\ \bar{v}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v}_n \\ \bar{v}_s \end{pmatrix}$$

因  $\bar{v}_n=0$  得

$$u_1 = \bar{v}_s \cos \theta \quad u = \bar{v}_s \cos \theta$$

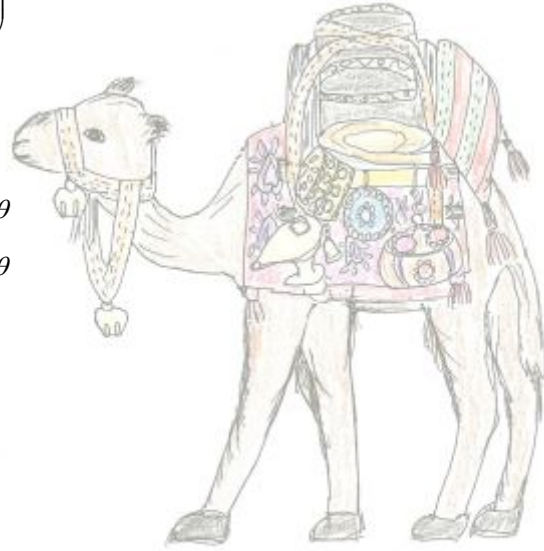
$$u_2 = \bar{v}_s \sin \theta \quad v = \bar{v}_s \sin \theta$$

② 在海上假想邊界  $\Gamma_\zeta$

$$\zeta = \bar{\zeta}$$

$$\sigma_i = \bar{\sigma}_{ij} n_j = \bar{\sigma}_i$$

$\bar{\zeta}$ 、 $\bar{\sigma}_i$  為已知值。



載滿珠寶的駱駝

③ 初期條件

初期條件通常設定開始計算時刻  $t=0$ ，在領域  $\Omega$  內

$$\zeta=0, \quad u_1=0, \quad u_2=0$$

## 6. 沿岸淺水域 2 維平面黏性流的時間差分矩陣形式連立微分方程式

利用時間差分，近似(4.5)式如下

$$\text{Re} \left( \frac{u_i^{t+1} - u_i^t}{\Delta t} \right) - \frac{\partial \sigma_{ij}^{t+1}}{\partial x_j} + \text{Re} \rho g \frac{\partial \zeta^{t+1}}{\partial x_i} = -\text{Re} \rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} + f_i^t + c_i^t$$

即

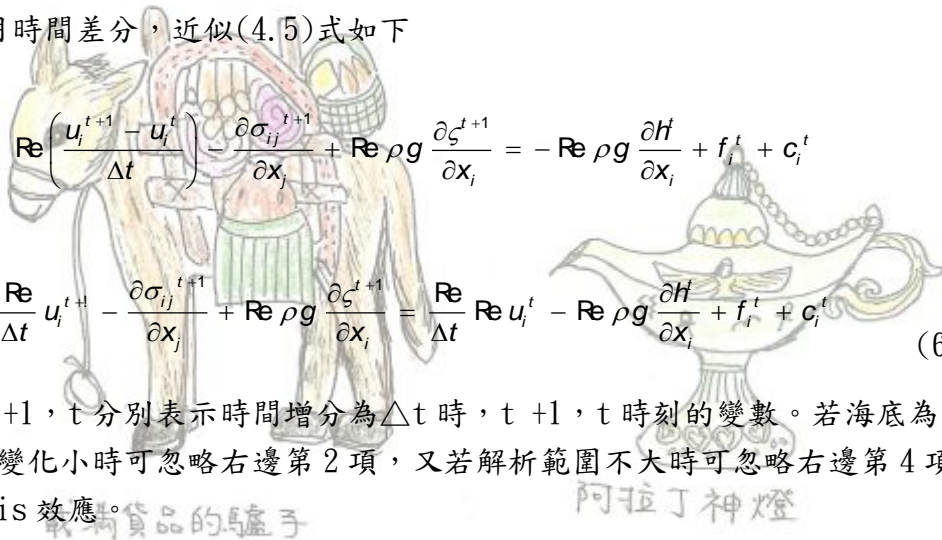
$$\frac{\text{Re}}{\Delta t} u_i^{t+1} - \frac{\partial \sigma_{ij}^{t+1}}{\partial x_j} + \text{Re} \rho g \frac{\partial \zeta^{t+1}}{\partial x_i} = \frac{\text{Re}}{\Delta t} u_i^t - \text{Re} \rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} + f_i^t + c_i^t \quad (6.1)$$

上標  $t+1$ ， $t$  分別表示時間增分為  $\Delta t$  時， $t+1$ ， $t$  時刻的變數。若海底為定床且地形變化小時可忽略右邊第 2 項，又若解析範圍不大時可忽略右邊第 4 項 Coriolis 效應。

依登坂，將上式及(3.7)式以下列矩陣形式表示

$$[L_{\alpha\beta}][X_\beta^{t+1}] = [K_\alpha^{t+1}] - \lambda[X_\alpha^t] \quad (\alpha, \beta=1, 2, 3) \quad (6.2)$$

但



載貨品的驢子

阿拉丁神燈

$$\lambda = \frac{\text{Re}}{\Delta t}$$

$$[L_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} -\lambda + \Delta + D_{11} & D_{12} & -\text{Re} \rho g D_1 \\ -D_{21} & -\lambda + \Delta + D_{22} & -\text{Re} \rho g D_2 \\ D_1 & D_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

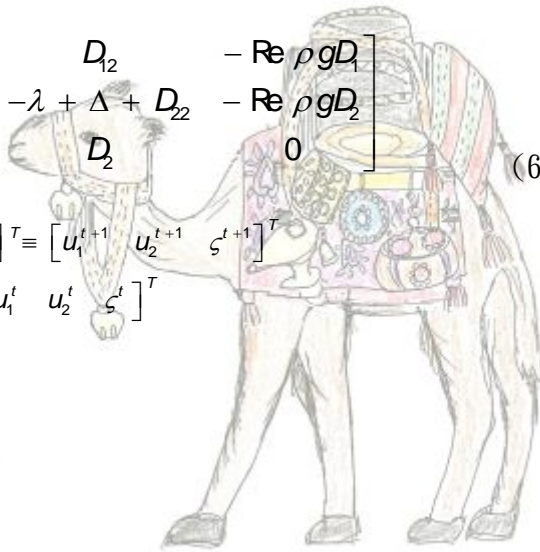
$$[X_\beta^{t+1}] = [X_1^{t+1} \ X_2^{t+1} \ X_3^{t+1}]^T = [u_1^{t+1} \ u_2^{t+1} \ \zeta^{t+1}]^T$$

$$[X_\alpha^t] = [X_1^t \ X_2^t \ X_3^t]^T = [u_1^t \ u_2^t \ \zeta^t]^T$$

$$[K_\alpha^t] = [K_1^t \ K_2^t \ 0]^T$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}$$



載滿珠寶的駱駝

$$D_{11} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \quad D_{22} = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

$$D_{12} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad D_{21} = \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1}$$

2011年埃及尼羅河之旅

$$K_i = H_i - F_i - C_i$$

$$[H_1] = \text{Re} \rho g \frac{\partial h}{\partial x_1}$$

$$[H_2] = \text{Re} \rho g \frac{\partial h}{\partial x_2}$$

$$[H_3] = 0$$

$$[F_1] = [W_x - B_x + S_{xx} + S_{xy}]$$

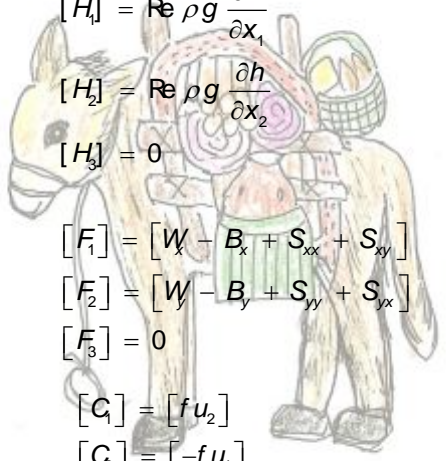
$$[F_2] = [W_y - B_y + S_{yy} + S_{yx}]$$

$$[F_3] = 0$$

$$[C_1] = [f u_2]$$

$$[C_2] = [-f u_1]$$

$$[C_3] = 0$$



載滿貨品的馬廐子



阿拉丁神燈

$L_{\alpha\beta}$  稱為微分演算子矩陣， $X_\beta$  為未知函數的向量成分， $F_\alpha$  為作用外力， $C_\alpha$  為柯氏力， $H_\alpha$  為海底地形影響力。

(6.3) 式是以矩陣形式表示的時間差分微分連立方程式。若解析規模小時可忽略柯氏力項，海底地形變化小時可忽略，不考量波動引起輻射應力時可忽略

輻射應力項。

## 7. 積分方程式

將(6.2)式乘以權重函數  $W_{\alpha\lambda}^*$  後，對空間作積分，得下列權殘表示。

$$\int_{\Omega} (L_{\alpha\beta} X_{\beta}^{t+1} - K_{\alpha}^{t+1} + \lambda X_{\alpha}^t) W_{\alpha\gamma}^* d\Omega = 0 \quad (7.1)$$

將上式對時間及空間，依 Gauss 發散定理作 2 次部分積分，得下列「逆定式化」式(inverse formation)。

$$\int_{\Omega} X_{\alpha}^{t+1} \hat{L}_{\alpha\beta} W_{\beta\gamma}^* d\Omega = \int_{\Gamma} (u_i^{t+1} \Sigma_{i\gamma}^* - \sigma_i^{t+1} W_{i\gamma}) d\Gamma + \int_{\Omega} K_{\alpha}^{t+1} W_{\alpha\gamma}^* d\Omega - \int_{\Omega} \lambda X_{\alpha}^t W_{\alpha\gamma}^* d\Omega \quad (7.2)$$

$\hat{L}_{\alpha\beta}$  是如下所示  $L_{\alpha\beta}$  的伴隨矩陣(參考 Tosaka(4.24)式)。

$$[\hat{L}_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} -\lambda + \Delta + D_{11} & D_{12} & -D_1 \\ D_{21} & -\lambda + \Delta + D_{22} & -D_2 \\ -\text{Re } \rho g D_1 & -\text{Re } \rho g D_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

$\Sigma_{i\gamma}^*$  是對應剪應力  $\sigma_i$ ，依基本解張量以下式表示

$$\Sigma_{i\gamma}^* = (-W_{3\gamma} \delta_{ij} + W_{i\gamma,j} + W_{j\gamma,i}) \eta_j \quad (7.4)$$

權重函數  $W_{\beta\gamma}^*$  作為微分演算子  $L_{\alpha\beta}$  的伴隨矩陣  $\hat{L}_{\alpha\beta}$  的基本解張量，必要滿足下式

$$\hat{L}_{\alpha\beta} W_{\beta\gamma}^* = \delta_{\alpha\gamma} \delta(x - y) \quad (7.5)$$

將(7.5)式代入(7.2)式，得  $X_{\gamma}(y)$  的積分方程式如下

$$X_{\gamma}^{t+1}(y) = \int_{\Gamma} u_i^{t+1}(x) \Sigma_{i\gamma}^*(x, y) d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma_i^{t+1} W_{i\gamma}(x, y) d\Gamma + \int_{\Omega} K_{\alpha}^{t+1} W_{\alpha\gamma}^*(x, y) d\Omega - \int_{\Omega} \lambda X_{\alpha}^t(x, y) W_{\alpha\gamma}^*(x, y) d\Omega \quad (7.6)$$

$\gamma=1, 2$  表示流速分量  $u_1$  及  $u_2$ ， $\gamma=3$  表示水位變動  $\zeta$  的積分方程式。對流速分量  $u_1$  及  $u_2$ ，是對源點  $y$  在邊界上時成立的積分方程式，考量基本解張量的空間



函數特異性，可以下式表示

$$\frac{\theta(y)}{2\pi} X_\gamma^{t+1}(y) = \int_\Gamma u_i^{t+1}(x) \Sigma_{i\gamma}^*(x, y) d\Gamma - \int_\Gamma \sigma_i^{t+1} W_{i\gamma}^*(x, y) d\Gamma + \int_\Omega K_\alpha^{t+1} W_{\alpha\gamma}^*(x, y) d\Omega - \int_\Omega \lambda X_\alpha^t(x, y) W_{\alpha\gamma}^*(x, y) d\Omega \quad (7.7)$$

對平滑邊界上式可簡化成

$$\frac{1}{2} X_\gamma^{t+1}(y) = \int_\Gamma u_i^{t+1}(x) \Sigma_{i\gamma}^*(x, y) d\Gamma - \int_\Gamma \sigma_i^{t+1} W_{i\gamma}^*(x, y) d\Gamma + \int_\Omega K_\alpha^{t+1} W_{\alpha\gamma}^*(x, y) d\Omega - \int_\Omega \lambda X_\alpha^t(x, y) W_{\alpha\gamma}^*(x, y) d\Omega \quad (7.8)$$

8. 基本解張量  $W_{\alpha\beta}^*$

基本解張量  $W_{\alpha\beta}^*$  可利用伴隨矩陣  $\hat{L}_{\alpha\beta}$  的餘因子矩陣  $M_{\alpha\beta}$  加以計算， $W_{\alpha\beta}^*$  可依無向量函數  $\phi^*$  以下列「勢」形式表示

$$W_{\alpha\beta}^* = M_{\alpha\beta} \phi^* \quad \text{2011 埃及尼羅河之旅} \quad (8.1)$$

依(7.3)式得

$$[M_{\alpha\beta}] = \text{Re}[\hat{M}_{\alpha\beta}] \quad (8.2)$$

$$[\hat{M}_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} D_{22} & -D_{21} & \frac{1}{\text{Re } \rho g} D_1(-\lambda + \Delta) \\ -D_{21} & D_{11} & \frac{1}{\text{Re } \rho g} D_2(-\lambda + \Delta) \\ -D_1(-\lambda + \Delta) & -D_2(-\lambda + \Delta) & \frac{1}{\text{Re } \rho g} (-\lambda + \Delta)(-\lambda + 2\Delta) \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

將(8.1)式代入(7.5)式，並考量與伴隨矩陣  $\hat{L}_{\alpha\beta}$  的行列式  $\hat{L}$  間，有下列關係

$$\hat{L}_{\alpha\beta} W_{\beta\gamma}^* = \delta_{\alpha\gamma} \delta(x = y) \quad \text{阿拉丁神燈} \quad (8.4)$$

因

$$\hat{L} = \text{Re}(-\lambda + \Delta) \Delta \quad (8.5)$$

得

$$\hat{L}\phi^* = \text{Re}(-\lambda + \Delta)\Delta\phi^* = \delta(x - y) \quad (8.6)$$

得

$$\phi^*(x, y) = \frac{1}{\lambda} \left[ \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{i}{4} H_0^{(1)}(i\sqrt{\lambda} r) \right] \quad (8.7)$$

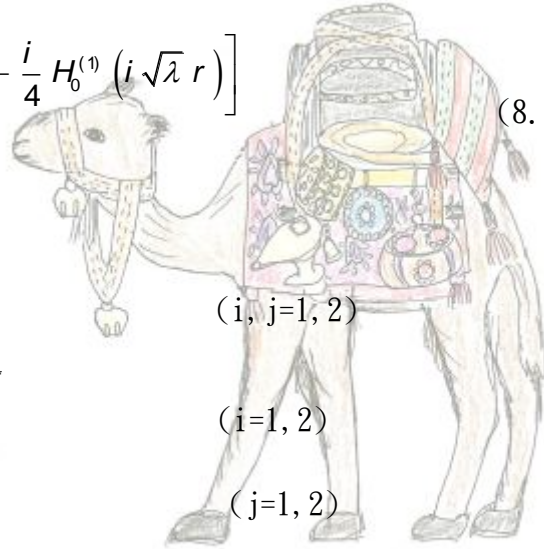
基本解張量各分量如下

$$W_{ij}^* = (\Delta\delta_{ij} - D_i D_j)\phi^* \quad (i, j=1, 2)$$

$$W_{i3}^* = \frac{1}{\text{Re } \rho g} D_i(-\lambda + \Delta)\phi^* \quad (i=1, 2)$$

$$W_{3j}^* = -D_j(-\lambda + \Delta)\phi^* \quad (j=1, 2)$$

$$W_{33}^* = \frac{1}{\text{Re } \rho g} (-\lambda + \Delta)(-\lambda + 2\Delta)\phi^*$$



載滿珠寶的駱駝

## 9. 數值模擬程序

### 2011 埃及尼羅河之旅

配合數值波-流-砂場模式，模式設置程序如下：

#### (1) 建立邊界及內部領域網格節點及網格元素

應用 Delaunay 三角分割建置 3 維海域各邊界網格元素建立：

##### ① 邊界節點

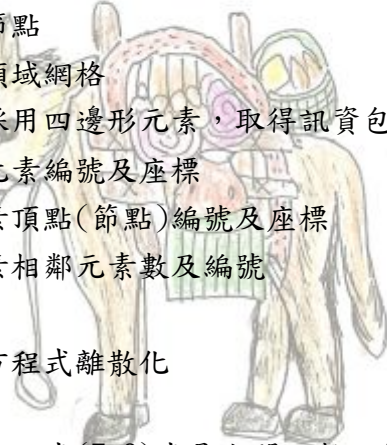
##### ② 內部領域網格

本法採用四邊形元素，取得訊資包含：

- i. 網格元素編號及座標
- ii. 各元素頂點(節點)編號及座標
- iii. 各元素相鄰元素數及編號

#### (2) 積分方程式離散化

積分方程式(7.8)式是空間函數，離散化是，將邊界 $\Gamma$ 以 $N$ 個微小線分 $S_i$ 加以離散，內部領域 $\Omega$ 則是以 $M$ 個微小面分 $A_j$ 加以離散，本篇配合波場採用線性元素。邊界 $\Gamma$ 分成海上的假想邊界線 $\Gamma_s$ 及陸地的港池邊界線 $\Gamma_L$ 等2部分，各有 $N_s$ 及 $N_L$ 個線分( $N=N_s+N_L$ )。將積分方程式(7.8)式離散，以下列和分方程式表示。



$$\frac{1}{2} X_{\gamma}^{t+1}(y) = \sum_{j=1}^N \int_{\mathcal{S}} u_j^{t+1}(x) \Sigma_{i_j}^*(x, y) d\Gamma - \sum_{j=1}^N \int_{\mathcal{S}} \sigma_j^{t+1} W_{i_j}^*(x, y) d\Gamma$$

$$+ \sum_{m=1}^M \int_{\mathcal{A}_m} K_{\alpha}^{t+1} W_{\alpha_j}^*(x, y) d\Omega - \sum_{m=1}^M \int_{\mathcal{A}_m} \lambda X_{\alpha}^t(x, y) W_{\alpha_j}^*(x, y) d\Omega$$



載滿珠寶的駱駝

2011 埃及尼羅河之旅



載滿貨品的驢子



阿拉丁神燈