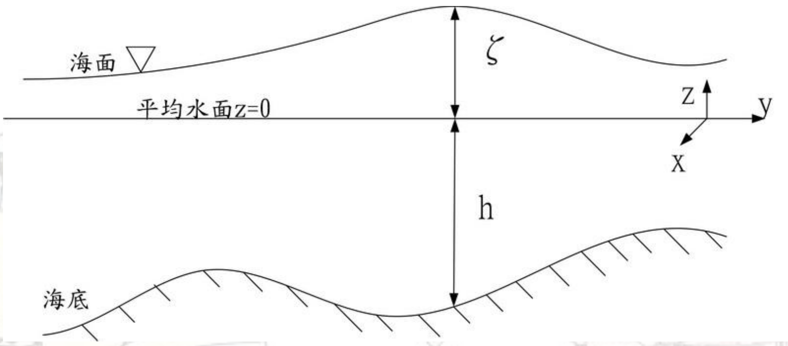
頻率領域淺水長波邊界積分方程式



1. 支配方程式(詳參淺水長波振動方程式)

淺水海域，在水平面內取直角座標系(x, y), z 軸垂直向上，潮汐流在 x, y 方向分量為 u、v，h 表示水深，水位上昇量為ζ時，淺水長波連續方程式為

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial u(\zeta+h)}{\partial x}+\frac{\partial v(\zeta+h)}{\partial y}=0 \tag{1}$$

外力僅為重力時，x, y 方向的淺水長波運動方程式為

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+g\frac{\partial \zeta}{\partial x}=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+g\frac{\partial \zeta}{\partial y}=0 \tag{3}$$

將(1)式對時間微分，並將(2)式對 x 微分，(3)式對 y 微分後代入得

$$\left(\frac{\partial \zeta^2}{\partial x^2}+\frac{\partial \zeta^2}{\partial y^2}\right)-\frac{1}{gh}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}=-\frac{1}{h}\left((1-g)(\nabla\zeta \bullet \nabla h)-\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial t}\right) \tag{4}$$

上式為非線性淺水長波運動支配方程式。

將(2)及(3)式的移流項忽略，得下列線性淺水長波運動支配方程式

$$\left(\frac{\partial \zeta^2}{\partial x^2}+\frac{\partial \zeta^2}{\partial y^2}\right)-\frac{1}{gh}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}=-\frac{1}{h}\nabla\zeta \cdot \nabla h \tag{5}$$

若視淺水長波為作一定頻率的振動運動，可假定水位 ζ 、流速 u、v 作下

列簡諧運動，σ 為角週頻率($=2\pi/T$，T=週期)，ζ_0、u_0、v_0為其振幅時

$$\begin{cases} \zeta = \zeta_o(\mathrm{x,y})e^{(-i\sigma t)} \\ u = u_o(\mathrm{x,y})e^{(-i\sigma t)} \\ v = v_o(\mathrm{x,y})e^{(-i\sigma t)} \end{cases} \tag{6}$$

因$\sigma^2/g=k^2h$，(4)式可以下式表示

$$\nabla^2\zeta_0 + k^2\zeta_0 = -\frac{1}{h}\left(i\sigma\left(u_0\frac{\partial h}{\partial x} + v_0\frac{\partial h}{\partial y}\right) + (1-g)\left(\nabla\zeta_0 \bullet \nabla h\right)\right) \tag{7}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

上式為非線性淺水長波振動方程式。

線性淺水長波運動支配方程式(5)式可改寫成

$$\nabla^2\zeta_0 + k^2\zeta_0 = -\frac{1}{h}\nabla\zeta_0 \cdot \nabla h \tag{8}$$

上式為線性淺水長波振動方程式。

2. 淺水長波支配方程式的邊界積分方程式化

2.1 非線性淺水長波邊界積分方程式

將(7)式乘以加權函數 G 並積分得

$$\int_\Omega G\left(\nabla^2\zeta_0 + k^2\zeta_0\right)d\Omega = \int_\Omega G\frac{1}{h}\left(i\sigma\left(u_0\frac{\partial h}{\partial x} + v_0\frac{\partial h}{\partial y}\right) + (1-g)\left(\nabla\zeta_0 \bullet \nabla h\right)\right)d\Omega \tag{9}$$

利用 Green 定理，上式改寫成

$$\int_\Omega \zeta_0\left(\nabla^2 G + k^2 G\right)d\Omega =$$

$$\int_\Gamma G\frac{\partial\zeta_0}{\partial n}d\Gamma - \int_\Gamma \zeta_0\frac{\partial G}{\partial n}d\Gamma - \int_\Omega \frac{1}{h}\left(i\sigma\left(u_0\frac{\partial h}{\partial x} + v_0\frac{\partial h}{\partial y}\right) + (1-g)\left(\nabla\zeta_0 \bullet \nabla h\right)\right)d\Omega \tag{10}$$

n 為邊界法線方向，上式左邊，加權函數 G 能滿足下式

$$\nabla^2 G + k^2 G = -\delta(Q-P)$$

其基本解為

$$G = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr)$$

$$H_0^{(1)}(kr) = J_0(kr) + iY_0(kr)$$

式中，$H_0^{(1)}$為第 1 類 0 次 Hankel 函數，J_0為第 1 類 Bessel 函數，Y_0為 2 類 Bessel 函數。

即非線性淺水長波邊界積分方程式可依下式表示

$$\gamma\zeta_0 = \int_\Gamma G\frac{\partial \zeta_0}{\partial n} d\Gamma - \int_\Gamma \zeta_0 \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma - \int_\Omega G\frac{1}{h}\left(i\sigma\left(u_0\frac{\partial h}{\partial x} + v_0\frac{\partial h}{\partial y}\right) + (1-g)\left(\nabla\zeta_0 \bullet \nabla h\right)\right) d\Omega \qquad (11)$$

在邊界上 γ=0.5，在領域內 γ=1。

2.2　線性淺水長波邊界積分方程式

將(8)式乘以加權函數 G 並積分得

$$\int G(\nabla^2\zeta_0 + k^2\zeta_0) d\Omega = -\int G\frac{1}{h}(\nabla\zeta_0 \cdot \nabla h) d\Omega$$

同理 2.1，利用 Green 定理，上式改寫成

$$\int \zeta_0(\nabla^2 G + k^2 G) d\Omega = \int G\frac{\partial\zeta_0}{\partial n} d\Gamma - \int \zeta_0 \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma - \int G\frac{1}{h}(\nabla\zeta_0 \cdot \nabla h) d\Omega$$

得下列線性淺水長波振動邊界積分方程式

$$\gamma\zeta_0 = \int_\Gamma G\frac{\partial\zeta_0}{\partial n} d\Gamma - \int_\Gamma \zeta_0\frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma - \int_\Omega G\frac{1}{h}(\nabla\zeta_0 \cdot \nabla h) d\Omega \qquad (12)$$