最大波高的機率分佈(Probability distribution of highest wave height)

從 Rayleigh 分佈公式就可看出沒有上限值存在，波高越大其出現機率呈指數函數減少。因此從各母集團的樣本中任意抽出的最大值，隨樣本不同而異，因此有討論機率分佈的必要。Longuet-Higgins 曾作詳盡推導，從波高的母集團抽取 n_0 個波高，其最大值(無因次)以 $x_{max}(=H_{max}/H_*)$表示，x_{max} 的機率密度函數以 $p^*(x_{max})$ 表示時，依定義，x 的最大值出現於$[x_{max}, x_{max}+dx_{max}]$範圍內的機率為 $p^*(x_{max})\,dx_{max}$。此機率為 n_0 個波中只有 l 個波為 x_{max} 及 $x_{max}+dx_{max}$ 間，其他(n_0-1)個波為未滿 x_{max} 時的機率，即

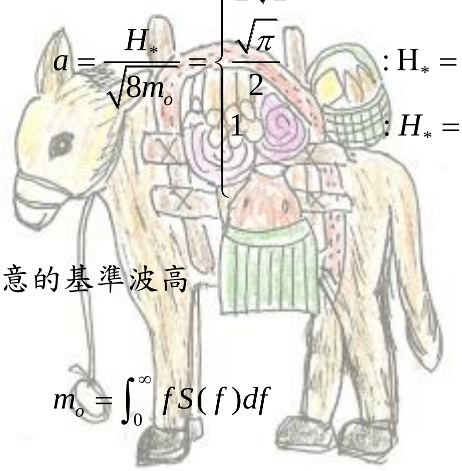
$$\begin{aligned} p^*(x_{max})dx_{max} &= n_0\left[1-P(x_{max})\right]^{n_0-1} p(x_{max})\ dx_{max} \\ &= d\left[1-P(x_{max})\right]^{n_0} \end{aligned} \quad (1)$$

$$P(x_{max}) = P\left[\xi > x_{max}\right] = \int_{x_{max}}^{\infty} p(\xi)d\xi = \exp\left[-a^2 x_{max}{}^2\right]$$

$$p(x_{max})dx_{max} = 2a^2 \exp\left[-a^2 x_{max}{}^2\right] dx_{max}$$

2011 埃及尼羅河之旅

$$a = \frac{H_*}{\sqrt{8m_o}} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{2}} & : H_* = \sqrt{m_o} = \zeta_{rms} \\ \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} & : H_* = \bar{H} \\ 1 & : H_* = H_{rms} \end{cases}$$



H_*為任意的基準波高

$$m_o = \int_0^{\infty} f S(f) df$$

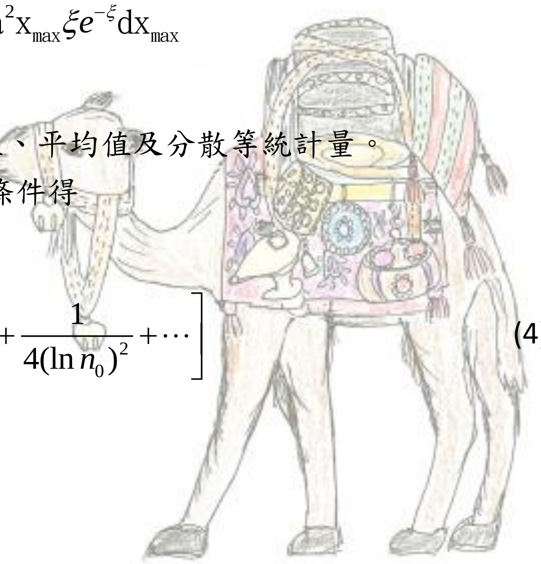
S(f)為週頻率譜，當 n_0 非常大時，(1)式右邊可以下式近似。

$$\lim_{n_0\to\infty}\left[1-P(x_{max})\right]^{n_0} = \lim_{n_0\to\infty}\left[1-\frac{\xi}{n_0}\right]^{n_0} = e^{-\xi} \quad (2)$$

$$\xi = n_0 P(x_{max}) = n_0 \exp\left[-a^2 x_{max}{}^2\right] \quad (3)$$

將(2)式代入(1)式得 x_{max} 的機率密度函數 $p^*(x_{max})$ 如下

$$p^*(x_{max})dx_{max} = -e^{-\xi}d\xi = 2a^2 x_{max}\xi e^{-\xi}dx_{max}$$



已知機率密度函數時，可計算最多值、平均值及分散等統計量。
最多值$(x_{max})_{mode}$，依 $dp^*/dx_{max}=0$ 的條件得

$$(x_{max})_{mode} \approx \frac{1}{a}(\ln n_0)^{1/2}\left[1+\frac{1}{4(\ln n_0)^2}+\cdots\right] \quad (4)$$

x_{max} 的期待值(算術平均值)為

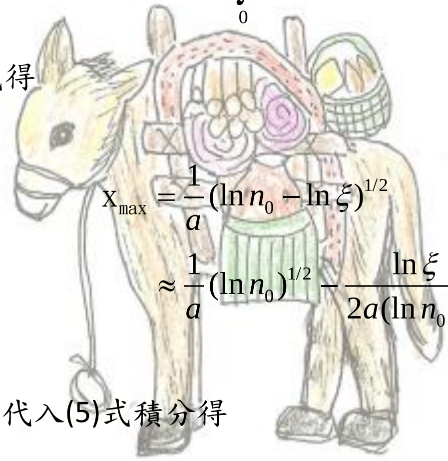
$$E[x_{max}] = \int_0^\infty x_{max}p^*(x_{max})dx_{max} = \int_0^{n_0} x_{max}e^{-\xi}d\xi \quad (5)$$

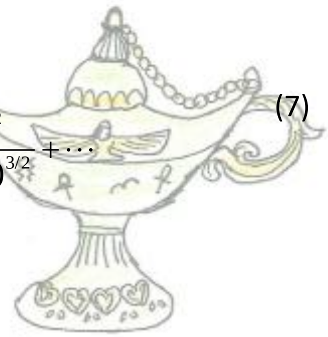
x_{max} 的自乘平均值為

2011 埃及尼羅河之旅

$$E[x_{max}{}^2] = \int_0^\infty x_{max}{}^2 p^*(x_{max})dx_{max} = \int_0^{n_0} x_{max}{}^2 e^{-\xi}d\xi \quad (6)$$

由(3)式得





$$\begin{aligned} x_{max} &= \frac{1}{a}(\ln n_0 - \ln\xi)^{1/2} \\ &\approx \frac{1}{a}(\ln n_0)^{1/2} - \frac{\ln\xi}{2a(\ln n_0)^{1/2}} - \frac{(\ln\xi)^2}{8a(\ln n_0)^{3/2}} + \cdots \end{aligned} \quad (7)$$

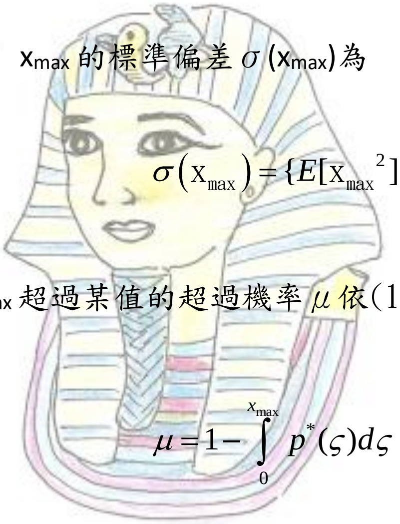
將上式代入(5)式積分得

$$E[x_{max}] = (x_{max})_{mean} \approx \frac{1}{a}(\ln n_0)^{1/2} + \frac{\gamma}{2a(\ln n_0)^{3/2}} - \frac{\pi^2+6\gamma^2}{48a(\ln n_0)^{3/2}} + \cdots \quad (8)$$

$$\gamma = \int_0^\infty (\ln\xi)e^{-\xi}d\xi = 0.5772\cdots \qquad (Euler常數)$$

將(3)式代入(6)式積分得

$$E[x_{max}{}^2] \approx \frac{1}{a^2}\ln n_0 + \frac{1}{a^2}\gamma \tag{9}$$

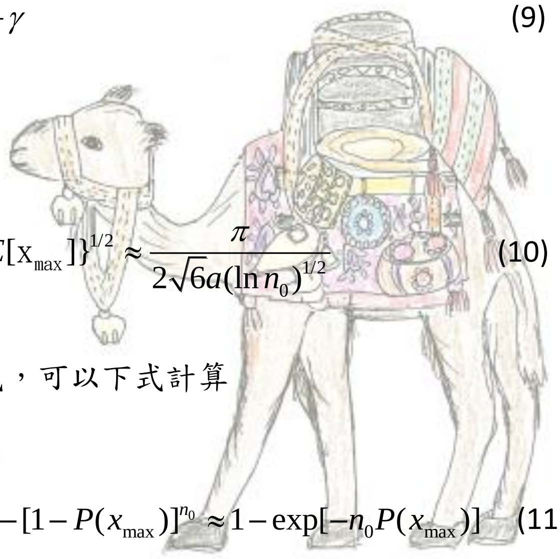


x_{max} 的標準偏差 σ (x_{max}) 為

$$\sigma(x_{max}) = \{E[x_{max}{}^2] - E[x_{max}]\}^{1/2} \approx \frac{\pi}{2\sqrt{6}a(\ln n_0)^{1/2}} \tag{10}$$

H_{max} 超過某值的超過機率 μ 依(1)式，可以下式計算

$$\mu = 1 - \int_0^{x_{max}} p^*(\varsigma)d\varsigma = 1 - [1 - P(x_{max})]^{n_0} \approx 1 - \exp[-n_0 P(x_{max})] \tag{11}$$



載滿珠寶的駱駝

因此，超過發生危險率為 μ 的最大波高(x_{max})$_\mu$ 為

2011 埃及尼羅河之旅

$$(x_{max})_\mu \approx \frac{1}{a}\left\{\ln\left[\frac{n_0}{\ln 1/(1-\mu)}\right]\right\}^{1/2} \tag{12}$$

回分類索引　　回海洋工作站

載滿貨品的驢子

阿拉丁神燈