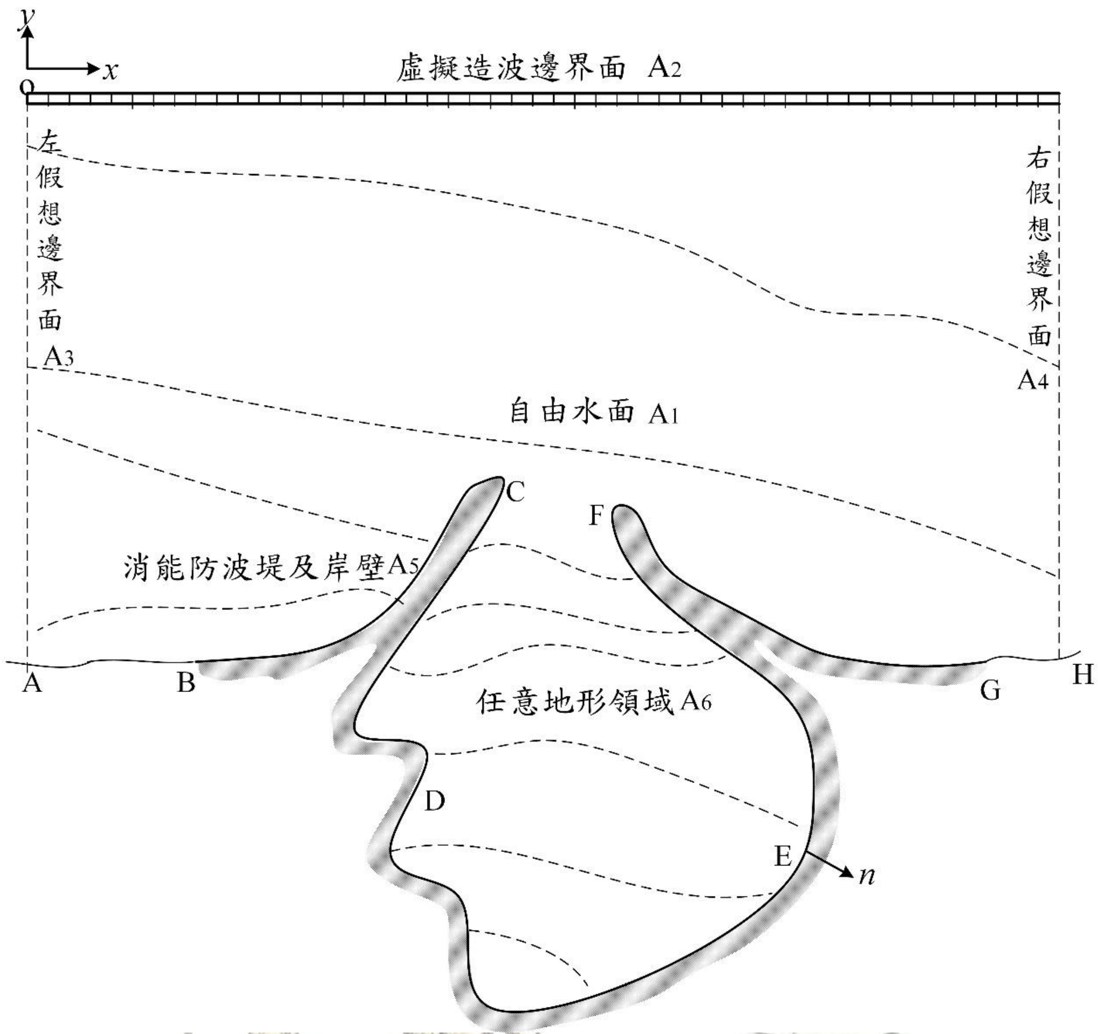
3 維邊界元素法應用於造波問題

頻率領域空間 3 維**港池波高分布**問題討論頻率領域港池水面波高特徵值，應用邊界元素法在微小振幅波理論下，覓出港池水面波高分布。本法將針對任意水深地形及任意港形的港池，利用線性元素 3 維邊界元素法，在時間領域以造波問題方式，考量自由水面的非線性動力學條件，數值計算分析港池水面波動。



1. 活塞式造波板造波方程式

活塞式造波板蛇型造波板運動速度 U(j, t), (j=1, 2, …, N₂)如下:

⑴ 簡諧波

$$U(j,t)=a\alpha\sigma\sin(\sigma t-kjw_B\cos\theta_B)$$

$$\alpha=\frac{\sinh kh\cosh kh+kh}{2\sinh^2 kh}$$

θ_B=造波方向(以 x 軸為基準)

a=造波振幅

$\alpha=\theta_B$ 活塞式造波板修正係數

σ=造波角頻率(=2π/T, T=造波週期)

k=造波波數

h=造波水深

w_B=每塊造波板寬度

(2) 短峰波

$$U(j,t)=a_1\alpha_1\sigma_1\sin\left[\sigma_1 t-k_1(jw_B)\cos\theta_{B1}\right]$$

$$+a_2\alpha_2\sigma_2\sin\left[\sigma_2 t-k_2(jw_B)\cos\theta_{B2}\right]$$

θ_{B1},θ_{B2}=造波方向(以 x 軸為基準逆時針為正)

a_1,a_2=造波振幅

α_1,α_2=活塞式造波板修正係數

2011 埃及尼羅河之旅

σ_1,σ_2=造波角頻率(=2π/T, T=造波週期)

k_1,k_2=造波波數

h=造波水深

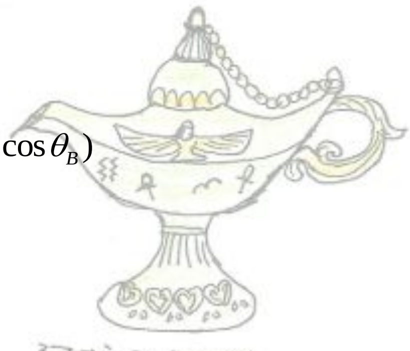
w_B=每塊造波板寬度

(3) 孤立波

$$U(j,t)=x_0\omega\operatorname{sech}h^2\omega(t-t_c-jw_B\cos\theta_B)$$

$$x_o=h_o\sqrt{\frac{4H_o}{3(H_o+h_o)}}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{h_o}}\sqrt{\frac{3H_o}{4h_o}\left(1+\frac{H_o}{h_o}\right)}$$



$t_c=\pi/\omega$

x_o=造波板的半衝程

H_o=造波波高

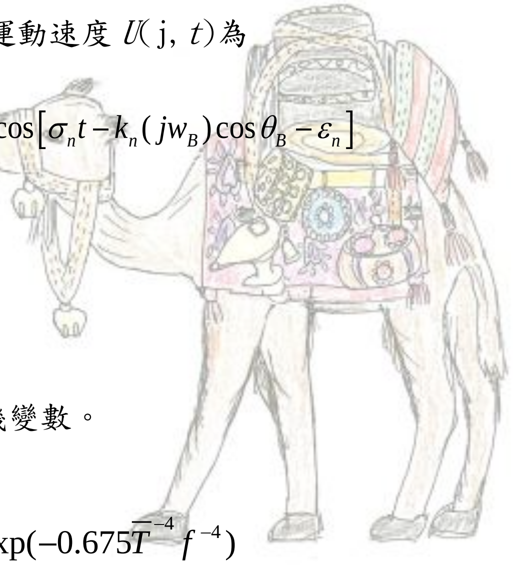
h_o =造波水深

ω=特徵角頻率

t_c=為特徵時間

⑷ 單方向不規則波

模擬造波波譜為 $S(f)$ 時，造波板運動速度 U(j, t)為



載滿珠寶的駱駝

$$U(j,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2df\,S(f_n)}\sigma_n\cos\left[\sigma_n t-k_n(jw_B)\cos\theta_B-\varepsilon_n\right]$$

$$\sigma_n=2\pi f_n$$

θ_B=造波方向

k_n=造波波數

ε_n=界於 0 與 2π 間之隨機變數。

⒜ Brestschneider 波譜

$$S(f)=0.430\overline{H}^2\overline{T}^4 f^{-5}\exp(-0.675\overline{T}^{-4}f^{-4})$$

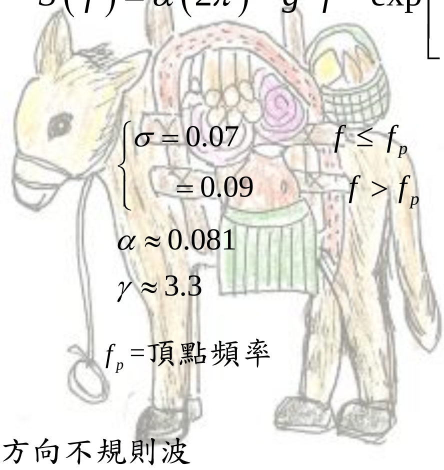
⒝ Brestschneider-Mitsuyasu 波譜

$$S(f)=0.257H_{1/3}^2/T_{1/3}^4 f^{-5}\exp(-1.03T_{1/3}^{-4}f^{-4})$$

$H_{1/3}$及$T_{1/3}$為欲模擬造波波譜的有義波高及週期。

⒞ JONSWAP 波譜

$$S(f)=\alpha(2\pi)^{-4}g^2f^{-5}\exp\left[-\frac{5}{4}\left(\frac{f}{f_p}\right)^{-4}\right]\gamma^{\exp\left[-\left(f/f_p-1\right)^2/2\sigma^2\right]}$$



$$\begin{cases}\sigma=0.07 & f\le f_p\\ \quad=0.09 & f>f_p\end{cases}$$

$\alpha\approx0.081$

$\gamma\approx3.3$

f_p=頂點頻率

⑸ 多方向不規則波

載滿貨品的驢子

阿拉丁神燈

模擬造波頻率波譜為 $S(f)$，能量方向分佈函數 G(f,θ)為，若不考量頻率的方向分布差異時，可以下式表示。

$$G(f;\theta)=G(\theta)=\begin{cases}\dfrac{2\ell!!}{\pi(2\ell-1)!!}\cos^{2l}\theta & :|\theta|\le\pi/2\\ 0 & :|\theta|>\pi/2\end{cases}$$

$2\ell!!=2\ell\cdot(2\ell-2)\cdots4\cdot2$，$(2\ell-1)!!=(2\ell-1)\cdot(2\ell-3)\cdots3\cdot1$。

光易型方向函數原式的集中度 S，為風速的函數，在工程應用上不太方便，合田與鈴木導入 S 的最大值 S_{max}，S_{max} 表示波浪方向分佈最大集中度，f_p 為波譜頂點頻率，將 S 原式改寫成下列形式。

$$S=\begin{cases} S_{max}(f/f_p)^5 & f\le f_p \\ S_{max}(f/f_p)^{-2.5} & f>f_p \end{cases}$$

f_p 是頻率譜頂點處的頻率，可以下式推算。

$$f_p=\frac{1}{1.05T_{1/3}}$$

ℓ 與 S_{max} 間的關係如下。

$$\ell=0.11S_{max} \qquad :\ell\ge2$$

通常 S_{max} 可採用下列的值

$S_{max}=10$　，風波
　　$=25$　，衰減距離較短湧浪
　　$=75$　，衰減距離較長湧浪

造波板運動速度 $U(j,t)$ 為

$$U(j,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2df\,S(f_n)}\,\sigma_n\cos[\sigma_n t-k_n(j\,w_B)\cos\alpha_n-\varepsilon_n]$$

$$\alpha_n=G(\theta_n)$$

2.　理想流體運動

(1)　支配方程式

設定流體為非粘性非壓縮性理想流體，在一定水深h海域靜水面取座標原點o，水平面取x、y軸，垂直向上方向取z軸，時間及重力加速度以t及g表示，流體運動的速度勢 $\phi(x,y,z;t)$ 應為滿足下列Laplace方程式。

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0$$

(2)　自由水面邊界條件

①　自由水面運動邊界條件

$$\frac{Dz}{Dt}=\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial\phi}{\partial z} \qquad z=\zeta$$

利用前進差分將上式差分化如下

$$z^{t+1} = z^{t} + \overline{\phi}^{t} \Delta t$$

$$\overline{\phi} = \partial\phi / \partial z$$

Δt 為差分時間間隔。

② 自由水面動力學邊界條件

$$\frac{D\phi}{Dt} + gz - \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) = 0 \qquad z = \zeta$$

上式是以 Lagrangian 形式表示，ζ為自由表面波形，g 為重力加速度。

利用前進差分將上式差分化如下

$$\phi^{t+1} = \phi^{t} + \left[\frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2)\right]^{t} \Delta t - gz^{t+1}$$

(3) 消波岸壁邊界條件

防波堤或岸壁具有任意反射率 K_r 時，消能係數 α 可以下式定義

$$\alpha = \mu\sqrt{1-k_r}$$

得下列消波防波堤或岸壁上 ϕ 與 $\overline{\phi}$ 間的關係

$$\overline{\phi} = i\,\alpha\phi$$

μ 為與波浪特性有關的具因次值係數必須依實驗決定，反射率等於1時，消能係數 α 等於0，表示岸壁全反射無消能效果。

(4) 假想邊界面及消波岸壁邊界條件

假想邊界面的消能係數為 γ 時，可以下式定義

$$\overline{\phi} = i\,\gamma\phi$$

γ 同如 α，必須依實驗決定，等於1時，表示假想邊界面為不透水面。

(5) 考量摩擦效應不透水海底邊界條件

若海底面具有摩擦效應，摩擦係數為 β 時，ϕ 與 $\overline{\phi}$ 間的關係為

$$\overline{\phi} = i\,\beta\phi$$

β 為具因次值係數必須依實驗決定，不考量海底摩擦時，β 等於0。

(6) 造波板邊界條件

活塞式造波板上，造波板運動速度與水粒子對造波板法線方向 n 的流速必須相等得

$$\overline{\phi} = \frac{\partial\phi}{\partial n} = -U(t)$$

3. 任意地形領域的速度勢 φ(x, y, z)

(1) 邊界積分方程式表示

如上圖所示，分析領域係由自由水面A_1、造波邊界面A_2、左假想邊界面A_3、右假想邊界面A_4、消能防波堤(包含岸壁)A_5及海底面A_6所包圍的3維封閉空間。依3維邊界元素法所述。封閉空間內任意1點的速度勢可以下列邊界積分方程式表示如下。

$$\gamma\phi + \int \phi \bar{q}^* dA = \int \bar{\phi} q^* dA \tag{3.1}$$

$$\gamma = \begin{cases} 1 & in\ boundary \\ 1/2 & on\ boundary \end{cases}$$

由於上式無法求得解析解必須利用數值分析，本文將採用平面1次元素進行離散化。

⑵ 元素分割

① 左右假想邊界、防波堤(含岸壁)及造波板面

由於左右假想邊界、防波堤(含岸壁)及造波板面對水深方向的分割至多2層甚至1層即可，因此宜利用人工方式直接編寫程式，將各邊界面元素離散化。本部分程式附於應用Delaunay三角分割建置3維海域各邊界網格元素的第5專案。

② 自由水面及海底面

自由水面及海底面，因包含海岸線、防波堤及港內複雜配置等，宜採用自動分割。本部分程式附於應用Delaunay三角分割建置3維海域各邊界網格元素的第4專案

。

⑶ 邊界積分方程式和分化

自由水面A_1、造波板邊界面A_2、左假想邊界面A_3、右假想邊界面A_4、消能防波堤(包含岸壁)A_5及海底面A_6分別配置n_1、n_2、n_3、n_4、n_5及n_6個節點，總計$n=n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6$個節點。四邊形面元素若採用線性(1次)元素時，四邊形線性元素依2維元素所述方法，將(3.1)式所示邊界積分方程式離散成下列和分方程式

$$\frac{1}{2}\phi + \sum_{p=1}^{6} \int_{A_p} \phi \bar{q}^* dA = \sum_{p=1}^{6} \int_{A_p} \bar{\phi} q^* dA \tag{3.2}$$

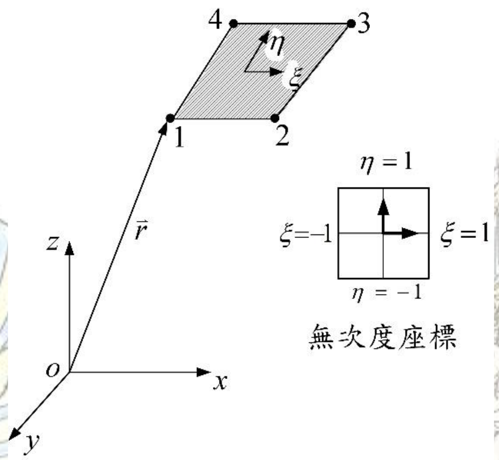
$$q^* = \frac{1}{4\pi r}$$

$$\bar{q}^* = \frac{\partial q^*}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{4\pi r}\right) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n}$$

$$\bar{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial n}$$

n 為向外單位法線。

為進行數值計算，將全體座標系轉換成無因次座標系。



如上圖，對某一特定元素以無因次座標表示，元素內任意一點的 φ 可以下式表示

$$\phi = \sum_{i=1}^{4} \psi_i \phi_i$$

$$\psi_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)\ (1-\eta)$$

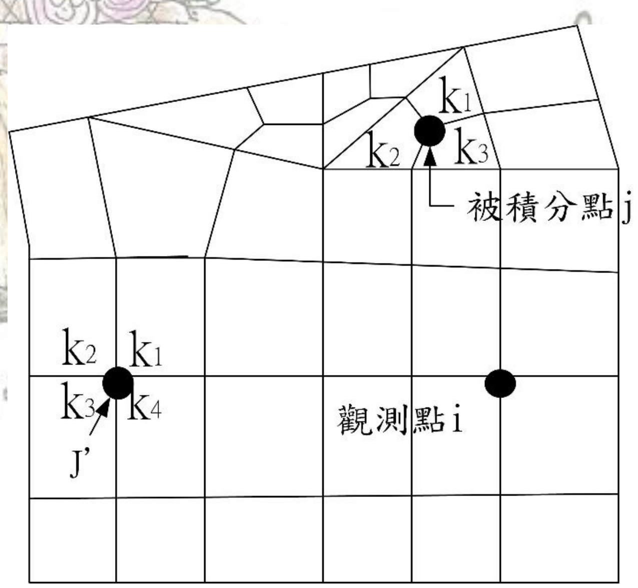
$$\psi_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)\ (1-\eta)$$

$$\psi_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)\ (1+\eta)$$

$$\psi_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)\ (1+\eta)$$

Ψi ($i=1\sim4$)為形狀函數。

對被積分節點 j，因利用應用 Delaunay 三角分割建置 3 維海域各邊界網格元素進行自動分割，各節點 j 會產生不同的相鄰元素數 k 個。如下圖以 3 個相鄰元素為例，依逆時針方向以 k_1、k_2 及 k_3 表示，以此類推，得下列邊界和分方程式



相鄰元素

$$\frac{1}{2}\phi_i + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{k} h_{ij}^{k} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{k} g_{ij}^{k}$$

（i=1, 2, ⋯, n）　　　（3.3）

若採用 3 次 GUASS 積分得

$$h_{ij}^{k} = \int_{A_k} \overline{q}_{ij}^{*}\phi_j dA$$

$$= -\frac{\phi_j}{16\pi}\sum_{s=1}^{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\psi_k^s \frac{1}{r_{ijks}^2}\frac{\partial r_{ijks}}{\partial n}|G|_{A_k}\, d\xi d\eta$$

ijks 表示源點為 i、被積分節點為 j、k 為 j 被積分節點的相鄰元素、s 為 k 相鄰元素的 GUASS 積分點。

$$\overline{q}_{ij}^{*} = \frac{\partial q_{ij}^{*}}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{4\pi r_{ij}}\right) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r_{ij}^2}\frac{\partial r_{ij}}{\partial n}$$

$$g_{ij}^{k} = \int_{A_k} q_{ij}^{*}\overline{\phi_j} dA$$

$$= \frac{\overline{\phi_j}}{16\pi}\sum_{s=1}^{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\psi_k^s \frac{1}{r_{ijks}}|G|_{A}\, d\xi d\eta$$

$$q_{ij}^{*} = \frac{1}{4\pi r_{ij}}$$

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$$

$$\frac{\partial r_{ij}}{\partial n} = \frac{\partial r_{ij}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial r_{ij}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial r_{ij}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial n}$$

對各被積分元素

$$|G|_{A_k} = \sqrt{{g_1}^2 + {g_2}^2 + {g_3}^2}$$

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} \\ g_2 &= \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \eta} \\ g_3 &= \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} \end{aligned}\right\}$$

阿拉丁神燈

$$x=\frac{1}{4}\left[(1-\xi)(1-\eta)x_1+(1+\xi)(1-\eta)x_2+(1+\xi)(1+\eta)x_3+(1-\xi)(1+\eta)x_4\right]$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \xi}&=\frac{1}{4}\left[-(1-\eta)x_1+(1-\eta)x_2+(1+\eta)x_3-(1+\eta)x_4\right]\\ \frac{\partial x}{\partial \eta}&=\frac{1}{4}\left[-(1-\xi)x_1-(1+\xi)x_2+(1+\xi)x_3+(1-\xi)x_4\right]\end{aligned}\right\}$$

$$y=\frac{1}{4}\left[(1-\xi)(1-\eta)y_1+(1+\xi)(1-\eta)y_2+(1+\xi)(1+\eta)y_3+(1-\xi)(1+\eta)y_4\right]$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial \xi}&=\frac{1}{4}\left[-(1-\eta)y_1+(1-\eta)y_2+(1+\eta)y_3-(1+\eta)y_4\right]\\ \frac{\partial y}{\partial \eta}&=\frac{1}{4}\left[-(1-\xi)y_1-(1+\xi)y_2+(1+\xi)y_3+(1-\xi)y_4\right]\end{aligned}\right\}$$

$$z=\frac{1}{4}\left[(1-\xi)(1-\eta)z_1+(1+\xi)(1-\eta)z_2+(1+\xi)(1+\eta)z_3+(1-\xi)(1+\eta)z_4\right]$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial \xi}&=\frac{1}{4}\left[-(1-\eta)z_1+(1-\eta)z_2+(1+\eta)z_3-(1+\eta)z_4\right]\\ \frac{\partial z}{\partial \eta}&=\frac{1}{4}\left[-(1-\xi)z_1-(1+\xi)z_2+(1+\xi)z_3+(1-\xi)z_4\right]\end{aligned}\right\}$$

$i\neq j$ 時，應用 Guass 積分進行數值積分得

$$h_{ij}^{k}=-\frac{1}{8\pi}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}w_l w_m \Psi_k \frac{1}{r_{ijklm}{}^{2}}\frac{\partial r_{ijklm}}{\partial n}\left|G\right|_{A_k}$$

$$g_{ij}^{k}=\frac{1}{8\pi}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}w_l w_m \Psi_k \frac{1}{r_{ijklm}}\left|G\right|_{A_k} \qquad (3.4)$$

$$\frac{\partial r_{ijklm}}{\partial n}=\frac{x_{jklm}-x_i}{r_{ijklm}}\left(\frac{\partial x}{\partial n}\right)_{jk}+\frac{y_{jklm}-y_i}{r_{ijklm}}\left(\frac{\partial y}{\partial n}\right)_{jk}+\frac{z_{jklm}-z_i}{r_{ijklm}}\left(\frac{\partial z}{\partial n}\right)_{jk}$$

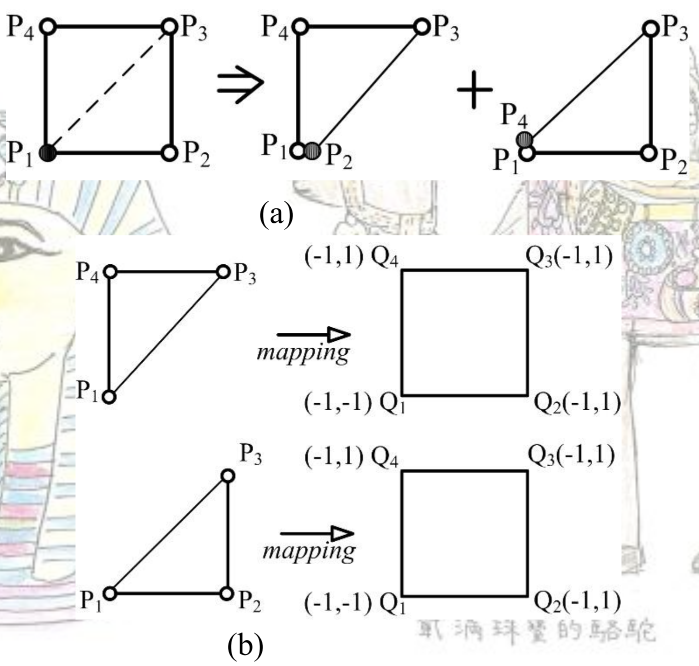
(l,m)為高斯積分點編號，r_{ijklm}為源點 i 至被積分元素(jklm)的 Guass 積分點(ξ_l,η_m)間距離，w_l、w_m 為加權函數，n=2 時，$w_l=w_m=1$。

$i=j$ 時，由於 $\partial r/\partial n=0$ 得

$$h_{ij}^{k}=0$$

(3.4)式，$i=j$ 時會產生特異值，必須作下列處理，如下圖(a)，對某被積分元素，節點為 P_1、P_2、P_3 及 P_4，討論節點為 P_1 時，將四邊形元素分割成三角形元素 $\Delta P_1P_3P_4$ 及 $\Delta P_1P_2P_3$，將 $\Delta P_1P_3P_4$ 保角變換成如下圖(b)所示正方形元素

（對 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 也作同樣處理），2 者間座標關係如下



奇異積分處理示意圖

$$x = \sum_{k=1}^{4} \beta_k \tilde{x}_k \tag{3.5}$$

$\tilde{x}_k$（k=1～4）為 Q_1～Q_4 點在實際 3 度空間內的座標，P_k 點座標為 x_k 時

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 \\ x_3 = \tilde{x}_3 \\ x_4 = \tilde{x}_4 \end{array}\right\}$$

將(3.5)式代入上式得

$$\begin{aligned} x &= \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 \\ &= \frac{1}{2}(1-\xi_2)x_1 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 \\ &= \sum_{k=1}^{3} \psi_k x_k \end{aligned}$$

載滿貨品的驢子

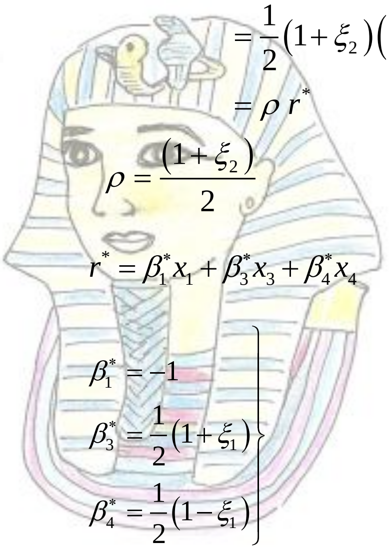
$$\psi_1 = \frac{1}{2}(1-\xi_2)$$

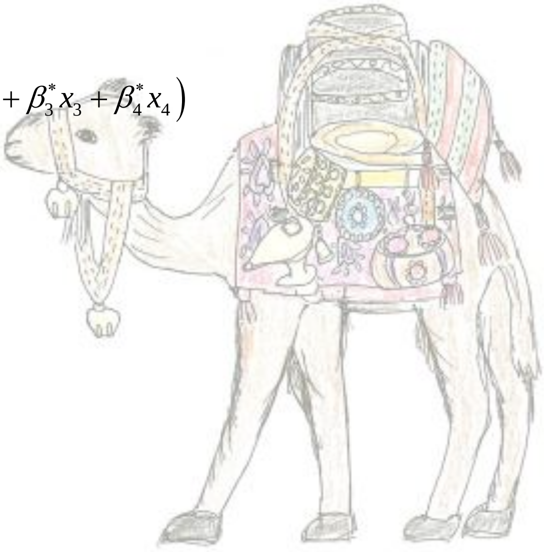
$$\psi_2 = \beta_3 = \frac{1}{4}(1+\xi_1)\ (1+\xi_2)$$

$$\psi^3 = \beta_4 = \frac{1}{4}(1-\xi_1)(1+\xi_2)$$

源點座標為 x_1，源點元素內任意 1 點位置向量 r 為

$$
\begin{aligned}
r = x - x_1 &= \sum_{k=1}^{3} \psi_k x_k - x_1 \\
&= \frac{1}{2}(1+\xi_2)\left(\beta_1^* x_1 + \beta_3^* x_3 + \beta_4^* x_4\right) \\
&= \rho\, r^*
\end{aligned}
$$





載滿珠寶的駱駝

$$\rho = \frac{(1+\xi_2)}{2}$$

$$r^* = \beta_1^* x_1 + \beta_3^* x_3 + \beta_4^* x_4$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\beta_1^* &= -1 \\
\beta_3^* &= \frac{1}{2}(1+\xi_1) \\
\beta_4^* &= \frac{1}{2}(1-\xi_1)
\end{aligned}
\right\}
$$

得源點與元素內任意一點間距離 r

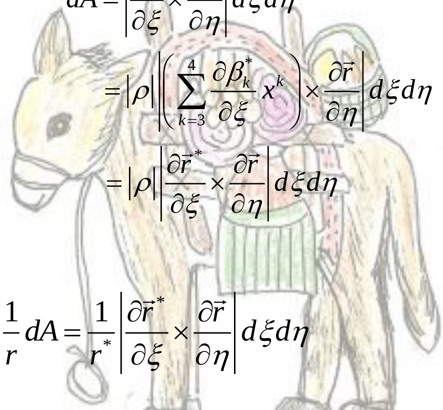
$$r = |\rho|\, r^*$$

2011 埃及尼羅河之旅

$r^* = \sqrt{r_1^{*2} + r_2^{*2} + r_3^{*2}}$, r_1^*、r_2^*及 r_3^*各為 r^*在 x、y 及 z 方向分量。

$x \to x_1$時，$|\rho| \to 0$ 但 $r^* \neq 0$，因此對 ξ_1，ξ_2座標的平面元素 dA，得

$$
\begin{aligned}
dA &= \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta} \right| d\xi d\eta \\
&= |\rho| \left| \left(\sum_{k=3}^{4} \frac{\partial \beta_k^*}{\partial \xi} x^k \right) \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta} \right| d\xi d\eta \\
&= |\rho| \left| \frac{\partial \bar{r}^*}{\partial \xi} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta} \right| d\xi d\eta
\end{aligned}
$$



即

$$\frac{1}{r} dA = \frac{1}{r^*} \left| \frac{\partial \bar{r}^*}{\partial \xi} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta} \right| d\xi d\eta$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial x^*}{\partial \xi} &= \frac{1}{2}(x_3 - x_4) \\
\frac{\partial y^*}{\partial \xi} &= \frac{1}{2}(y_3 - y_4) \\
\frac{\partial z^*}{\partial \xi} &= \frac{1}{2}(z_3 - z_4)
\end{aligned}
\right\} \qquad (3.6)
$$

載滿貨品的驢子

阿拉丁神燈

由上式可知特異性已被消除。

同理，源點為 P_2 時得

$$r^* = \beta_2^* x_2 + \beta_3^* x_3 + \beta_4^* x_4$$

$$\left.\begin{aligned} \beta_2^* &= -1 \\ \beta_3^* &= \frac{1}{2}(1+\xi_1) \\ \beta_4^* &= \frac{1}{2}(1-\xi_1) \end{aligned}\right\}$$

載滿珠寶的駱駝

$\dfrac{\partial x^*}{\partial \xi_1}$ 、 $\dfrac{\partial y^*}{\partial \xi_1}$ 、 $\dfrac{\partial z^*}{\partial \xi_1}$ 值如(3.6)式所示。

源點為 P_3 時得

$$r^* = \beta_1^* x_1 + \beta_2^* x_2 + \beta_3^* x_3$$

$$\left.\begin{aligned} \beta_1^* &= \frac{1}{2}(1-\xi_1) \\ \beta_2^* &= \frac{1}{2}(1+\xi_1) \\ \beta_3^* &= -1 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x^*}{\partial \xi_1} &= \frac{1}{2}(x_2 - x_1) \\ \frac{\partial y^*}{\partial \xi_1} &= \frac{1}{2}(y_2 - y_1) \\ \frac{\partial z^*}{\partial \xi_1} &= \frac{1}{2}(z_2 - z_1) \end{aligned}\right\} \qquad (3.7)$$

阿拉丁神燈

源點為 P_4 時得

$$r^* = \beta_1^* x_1 + \beta_2^* x_2 + \beta_4^* x_4$$

載滿貨品的驢子

$$\left.\begin{aligned} \beta_1^* &= \frac{1}{2}(1-\xi_1) \\ \beta_2^* &= \frac{1}{2}(1+\xi_1) \\ \beta_4^* &= -1 \end{aligned}\right\}$$

$\dfrac{\partial x^*}{\partial \xi_1}$ 、 $\dfrac{\partial y^*}{\partial \xi_1}$ 、 $\dfrac{\partial z^*}{\partial \xi_1}$ 值如(3.7)式所示。

因此得

$$g_{ij}^{k} = \frac{1}{8\pi}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} w_l w_m \Psi_k \frac{1}{r_{ijklm}^{*}} \left|G^{*}\right|_{A_k} \tag{3.8}$$

$$\left|G^{*}\right|_{A_{jk}} = \sqrt{g_1^{*2} + g_2^{*2} + g_3^{*2}}$$

$$\left.\begin{aligned} g_1^{*} &= \frac{\partial y^{*}}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z^{*}}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} \\ g_2^{*} &= \frac{\partial z^{*}}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial x^{*}}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \eta} \\ g_3^{*} &= \frac{\partial x^{*}}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y^{*}}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

r^{*}_{ilm} 為源點 i 至被積分元素(jk)的 Guass 積分點(ξ_l, η_m)間距離。

4. 全體座標與元素座標間的關係

全體座標與元素座標間的關係，可依下列變換法則

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial z} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

2011 埃及尼羅河之旅

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial y}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

又

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}\left[-(1-\eta)x_1 + (1-\eta)x_2 + (1+\eta)x_3 - (1+\eta)x_4\right] \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}\left[-(1-\xi)x_1 - (1+\xi)x_2 + (1+\xi)x_3 + (1-\xi)x_4\right] \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}\left[-(1-\eta)y_1 + (1-\eta)y_2 + (1+\eta)y_3 - (1+\eta)y_4\right] \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}\left[-(1-\xi)y_1 - (1+\xi)y_2 + (1+\xi)y_3 + (1-\xi)y_4\right] \end{aligned}\right\}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}\left[-(1-\eta)z_1+(1-\eta)z_2+(1+\eta)z_3-(1+\eta)z_4\right]\\
\frac{\partial z}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}\left[-(1-\xi)z_1-(1+\xi)z_2+(1+\xi)z_3+(1-\xi)z_4\right]
\end{aligned}
\right\}
$$

依上述數值計算，將(3.1)式以下列矩陣形式表示

$$\Phi = K\overline{\Phi} \tag{3.10}$$

上式表示在邊界表面ϕ與$\bar{\phi}$間的關係式。

$$[K]=[H+I]^{-1}[G]$$

$$[H]=\sum_{k=1}^{k} H_{ij}^{k}$$

$$[G]=\sum_{k=1}^{k} G_{ij}^{k}$$

4. 任意地形領域邊界表面上速度勢及導函數間的關係式

任意地形港內領域，自由水面A_1、左假想邊界面A_2、造波邊界面A_3、右假想邊界面A_4、消能防波堤(包含岸壁)A_5及海底面A_6分別配置N_1、N_2、N_3、N_4、N_5及N_6個四角形1次元素加以離散，邊界表面上速度勢及導函數間的關係式如(3.10)式所示，可以下列部份矩陣表示

$$
\begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\\ \phi_4\\ \phi_5\\ \phi_6\end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16}\\
k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26}\\
k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36}\\
k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46}\\
k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56}\\
k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}\overline{\phi_1}\\ \overline{\phi_2}\\ \overline{\phi_3}\\ \overline{\phi_4}\\ \overline{\phi_5}\\ \overline{\phi_6}\end{Bmatrix}
\tag{4.1}
$$

5. 連立方程式

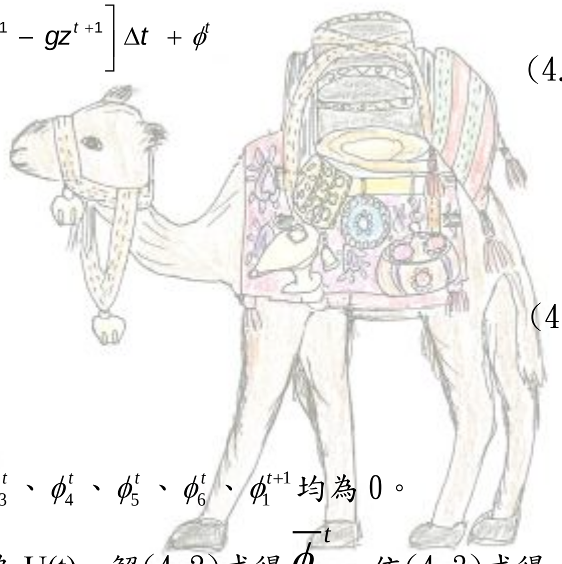
將1.～3.所示各項邊界條件代入上式，得

$$
\begin{bmatrix}
k_{11} & 0 & i\gamma k_{13} & i\gamma k_{14} & i\alpha k_{15} & i\beta k_{16}\\
k_{21} & -I & i\gamma k_{23} & i\gamma k_{24} & i\alpha k_{25} & i\beta k_{26}\\
k_{31} & 0 & i\gamma k_{33}-I & i\gamma k_{34} & i\alpha k_{35} & i\beta k_{36}\\
k_{41} & 0 & i\gamma k_{43} & i\gamma k_{44}-I & i\alpha k_{45} & i\beta k_{46}\\
k_{51} & 0 & i\gamma k_{53} & i\gamma k_{54} & i\alpha k_{55}-I & i\beta k_{56}\\
k_{61} & 0 & i\gamma k_{63} & i\gamma k_{64} & i\alpha k_{65} & i\beta k_{66}-I
\end{bmatrix}^{t+1}
\begin{Bmatrix}\overline{\phi_1}\\ \phi_2\\ \phi_3\\ \phi_4\\ \phi_5\\ \phi_6\end{Bmatrix}^{t+1}
=
\begin{Bmatrix}k_{12}U+\phi_1\\ k_{22}U\\ k_{32}U\\ k_{42}U\\ k_{52}U\\ k_{62}U\end{Bmatrix}^{t+1}
\tag{4.2}
$$

自由水面上

$$\phi^{t+1}=\left[\frac{1}{2}(\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2)^{t+1}-gz^{t+1}\right]\Delta t+\phi^t \tag{4.3}$$

$$x^{t+1}=x^t+\frac{\partial\phi_1^t}{\partial x}\Delta t$$
$$y^{t+1}=y^t+\frac{\partial\phi_1^t}{\partial y}\Delta t$$
$$z^{t+1}=z^t+\frac{\partial\phi_1^t}{\partial z}\Delta t \tag{4.4}$$



載滿珠寶的駱駝

對時間反覆計算過程如下：

① t=0 時刻，呈靜止狀態，ϕ_2^t、ϕ_3^t、ϕ_4^t、ϕ_5^t、ϕ_6^t、ϕ_1^{t+1} 均為 0。

② t=t Δt 時刻的造波板運動速度為 U(t)，解(4.2)式得 $\overline{\phi_1}^t$，依(4.3)式得(t+1) Δt 時刻 ϕ_1^{t+1}，從(4.4)式求得(t+1) Δt 時刻自由表面水粒子位置 $(x^{t+1},y^{t+1},z^{t+1})$。

③ 對(t+1) Δt 時刻水面波形，重新計算(4.1)式。

反覆上述②、③即可。

載滿貨品的驢子

阿拉丁神燈