

## 波動基礎方程式

流體運動通常可以下式所示 2 階偏微分方程表示

$$A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + D \frac{\partial \phi}{\partial x} + E \frac{\partial \phi}{\partial y} + F \phi + G = 0$$

上式可變換分類成下述各種基本型式，各有其相對應物理現象。

- ① Laplace 及 Poisson 方程式 (橢圓型)

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = b$$

- ② Helmholtz 方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k^2 \phi = 0$$

- ③ 擴散方程式 (拋物線型)

$$a^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + b(x, t)$$

- ④ 波動方程式 (雙曲線型) 2011 埃及尼羅河之旅

$$c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

偏微分方程式基本型式在流體力學上相對應問題，如下表所示。

偏微分方程式基本型式與流體力學問題

偏微分方程式基本形式	流體力學問題
Laplace 方程式	波運動，變形，波力 ( $\nabla^2 \phi = 0$ )
Poisson 方程式	流函數—物體附近之流 ( $\nabla^2 \phi = -\omega$ ) 壓力—物體之作用力 ( $\nabla^2 p = Q(u, v, t)$ ) 地下水 ( $k \nabla^2 H = 0$ )
Helmholtz 方程式	波繞射、湖、灣水振動
擴散方程式	海嘯、暴潮、水質污染、熱污染、擴散
波動方程式	淺海長波、湖、灣水振動