

### 3維理想流體強非线性波運動

非粘性非壓縮性理想流體，靜水面上取座標原點 $o$ ，水平向右及垂直向上方向取 $x$ 及 $z$ 軸，時間及重力加速度以 $t$ 及 $g$ 表示。

#### 1. 支配方程式

速度勢 $\phi(x, y, z; t)$ 應滿足下列 Laplace 方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

#### 2. 自由表面邊界條件

自由表面上運動及動力邊界條件如下

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{Dx}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v &= \frac{Dy}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ w &= \frac{Dz}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

$$\frac{D\phi}{Dt} + g\zeta - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{p}{\rho} = 0 \quad (B)$$

上式是以 Lagrangian 形式表示， $\zeta$ 為自由表面波形， $\rho$ 為流體密度， $p$ 為作用於自由表面的壓力， $g$ 為重力加速度。

進行數值分析時，採用時間前進差分，對(A)式， $(t+1)\Delta t$ 時刻與 $t\Delta t$ 時刻間的關係如下

$$\left. \begin{aligned} x^{t+1} &= x^t + \frac{\partial \phi^t}{\partial x} \Delta t \\ y^{t+1} &= y^t + \frac{\partial \phi^t}{\partial y} \Delta t \\ z^{t+1} &= z^t + \frac{\partial \phi^t}{\partial z} \Delta t \end{aligned} \right\}$$



載滿珠寶的駱駝



阿拉丁神燈

上式表示隨時間變化水粒子移動位置。

自由水面(B)式， $(t+1)\Delta t$ 時刻與 $t\Delta t$ 時刻間的關係如下

$$\phi^{t+1} = \phi^t + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] \Delta t - g z^{t+1} \Delta t$$

3. 造波板上邊界條件

活塞式造波板上，造波板運動速度與水粒子對造波板法線方向 $n$ 的流速必須相等得

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -U(t)$$

4. 不透水岸壁邊界條件

$$\phi = 0$$

5. 虛擬消波透水層自由表面邊界條件

2011 埃及尼羅河之旅

通常水面上受大氣壓力作用恆為一定，可視為0。虛擬消波透水層自由表面，假定所受壓力與流體運動的速度勢成如下式所示比例時，會如有消波結構物存在時具有消能效應

$$p = \mu \phi$$

$\mu$ 為虛擬消能係數。

虛擬消波透水層自由表面(B)式， $(t+1)\Delta t$ 時刻與 $t\Delta t$ 時刻間的關係如下

$$\phi^{t+1} = \phi^t + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] \Delta t - g z^{t+1} \Delta t - \frac{p^t}{\rho} \Delta t$$

載滿貨品的驢子

阿拉丁神燈