

### 頻率領域空間3維問題

實際海域海底地形非常複雜，欲正確了解波變形問題時，應對波的反射、繞射、折射等現象一併考慮，才能獲得正確波變形現象。圖1~4為開放海域，礁石存在、浮體被固定或繫留、透水消波離岸潛堤群或透水消波離岸堤群。圖5、6為沿岸附近透水消波離岸潛堤群或半潛式浮體被固定或繫留。圖7為任意形狀海底地形港池，圖8為港池水面受船體運動影響。

不考量碎波情況下，假定流體運動為微小振幅波運動持有速度勢，利用3維邊界元素法解析3維Laplace方程式為非常有效方法。在頻率領域解析時，必要以複數形式分析。將說明如何利用一定四角形元素分離邊界方程式，以任意形狀及任意海底地形港池為例，岸壁可為消波岸壁，可考量海底摩擦效應，說明3維邊界元素法解析方法。

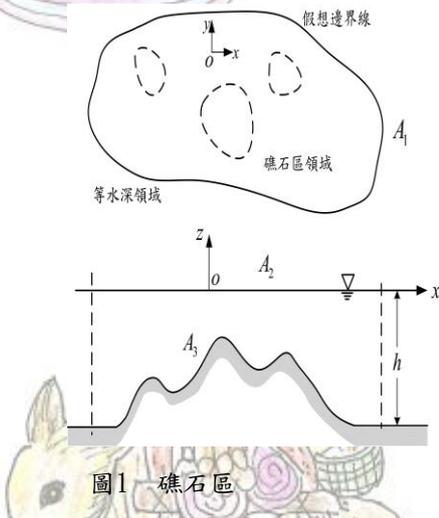


圖1 礁石區

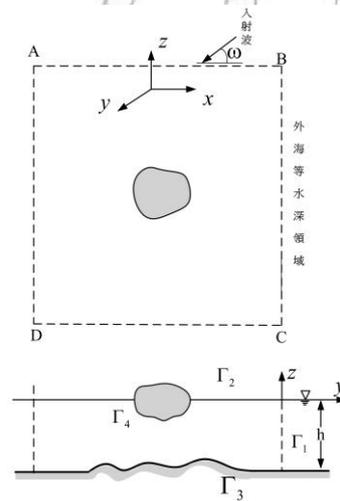


圖2 外海半潛式浮體

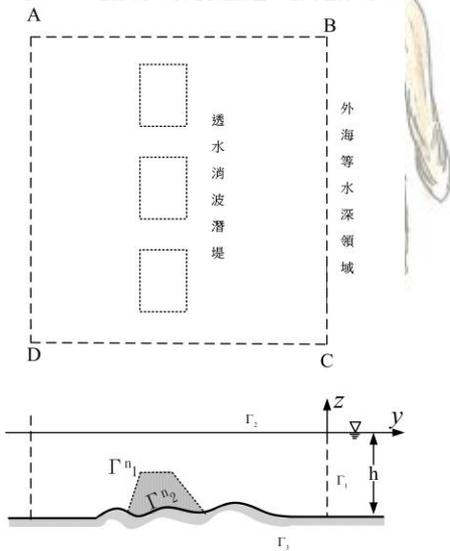


圖3 外海透水消波離岸潛堤群

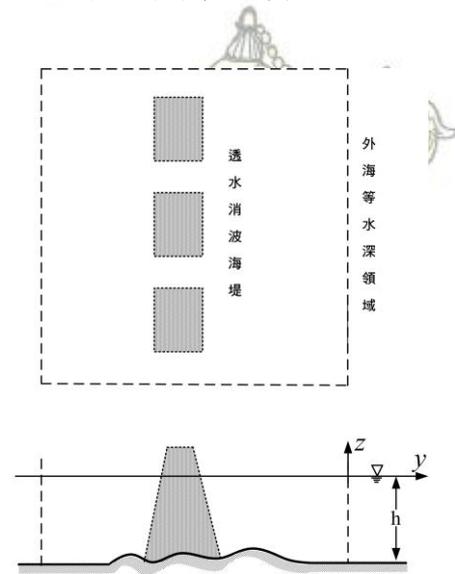


圖4 外海透水消波離岸堤群

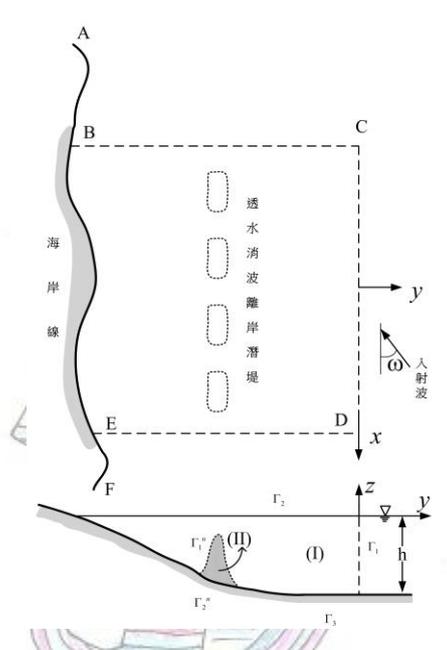


圖5 沿岸透水消波離岸潛堤群

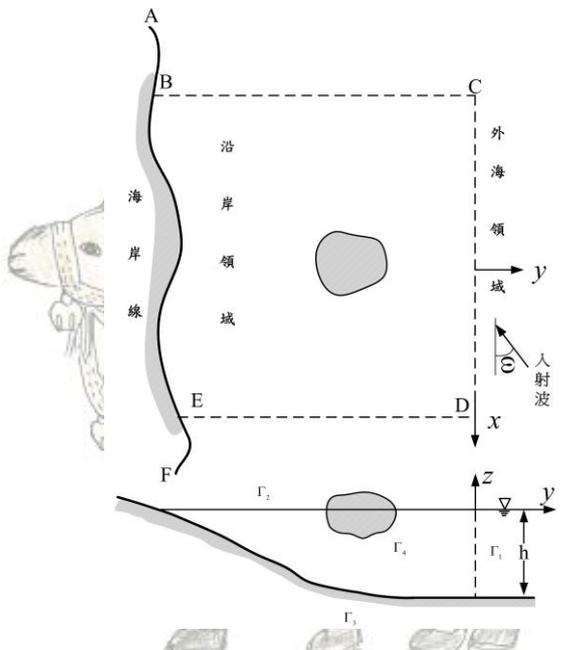


圖6 沿岸附近半潛式浮體  
載滿珠寶的駱駝

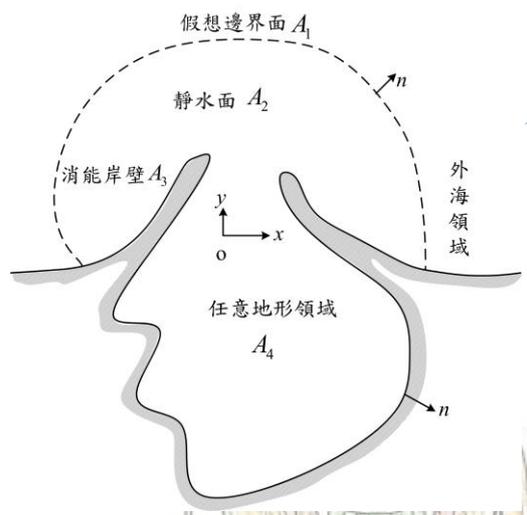


圖7 任意形狀海底地形港池

及尼

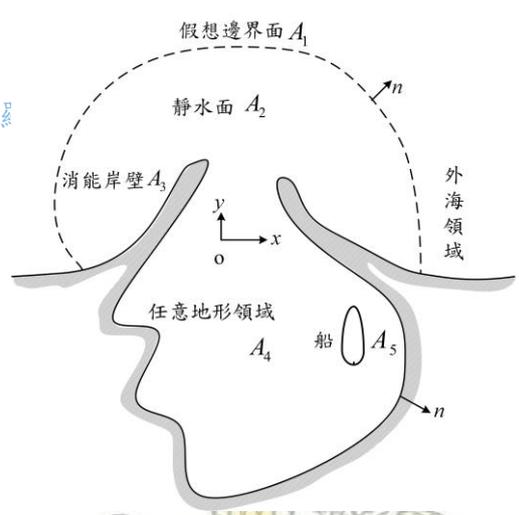


圖8 任意形狀海底地形港池船體運動

無限開放海域時，在遠離海岸結構物甚遠處設置假想邊界面，將海域分成不受結構物或地形變化引起散射波影響的等水深 $h$ 外海領域，及水深任意或結構物存在的任意水深領域等2領域。對等水深外海領域，求波運動的速度勢近似解，任意水深領域則以3維邊界元素法表示。利用在假想邊界面因流體運動的質量及能量流束必須連續的條件，可求解流體運動。

沿岸附近時，則從不受結構物或地形影響處，如圖5~7所示，畫定假想邊界面將海域分成等水深外海領域，及任意地形領域等2領域，從那裏畫定假想邊界面尚無定論，必要試錯。

## 示範說明例

以下圖所示任意海底地形及任意形狀港池作為說明例，說明如何應用邊界元素法數值解析。首先說明各項流體領域支配方程式及邊界條件，進而推導外海等水深領域速度勢近似解，說明如何應用邊界元素法（四邊形一定元素）對任意形狀及海底地形領域的解析方法，最後說明波高、波壓、反射率及透過率等物理量。

將解析海域分割成外海領域及任意水深地形領域等2領域，外海領域如下圖所示，由假想邊界面 $A_1$ 至無限遠外海構成，並設定其水深一定為 $h$ ，假想邊界面 $A_1$ 與海岸線相交點設置於不受港口及防波堤引起散射波影響處，在無限遠外海處Sommerfeld輻射條件應被滿足。任意水深地形封閉3維空間領域由假想邊界面 $A_1$ 、靜水面 $A_2$ 、消能岸壁(包含防波堤) $A_3$ 及任意水深海底面 $A_4$ 等4部分構成。



外海領域

### 1. 理想流體微小振幅波運動

載滿貨品的驢子

阿拉丁神燈

設定流體為非粘性非壓縮性理想流體，在一定水深 $h$ 海域靜水面取座標原點 $O$ ，水平面取 $x$ 、 $y$ 軸，垂直向上方向取 $z$ 軸，時間及重力加速度以 $t$ 及 $g$ 表示，入射波為振幅 $\zeta_0$ 、週頻率 $\sigma (=2\pi/T; T$ 為波週期)的簡諧波，流體運動的微小振幅波速度勢 $\Phi(x, y, z; t)$ 可以下式表示。

$$\Phi(x,y,z;t) = \frac{g\zeta_0}{\sigma} \phi(x,y,z)e^{-i\sigma t}$$

(1) 支配方程式

勢函數  $\phi(x,y,z)$  應為滿足下列 Laplace 方程式的函數

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

(2) 靜水面邊界條件

靜水面上，由於運動學條件及大氣壓力一定的條件，可得下列

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\sigma^2}{g} \phi \quad (z=0)$$

(3) 無限遠處輻射條件

無限遠處 2 維 Sommerfeld 輻射條件如下

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \pm \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \text{ 或 } \frac{\partial \phi}{\partial x} = \pm i k \phi, \quad x \rightarrow \pm \infty$$

(4) 消波岸壁邊界條件

防波堤或岸壁具有任意反射率  $K_r$  時，消能係數  $\alpha$  可以下式定義

$$\alpha = \sqrt{1 - K_r^2}$$

得下列消波防波堤或岸壁上  $\phi$  與  $\bar{\phi}$  間的關係

$$\bar{\phi} = i k \alpha \phi$$

反射率等於 1 時，消能係數  $\alpha$  等於 0，表示岸壁無消能效果。

(5) 考量摩擦效應不透水海底邊界條件

若海底面具有摩擦效應，摩擦係數為  $\alpha_f$  時， $\phi$  與  $\bar{\phi}$  間的關係為

$$\bar{\phi} = i \alpha_f \phi$$

必須依實驗決定，不考量海底摩擦時， $\alpha_f$  等於 0。

(6) 假想邊界條件

守恆原則下，在任意假想位置的邊界條件有 2:

① 假想邊界兩側的流體運動引起的能量流束必須連續，即兩側流體作用於假想邊界面的壓力必須相等，壓力可依壓力方程式計算。

② 假想邊界兩側的流體運動引起的質量流束必須連續，即兩側流體通過假想邊界面的流量(兩側等水深時為流速)必須相等。

依上述 2 條件可推導出任意假想位置的邊界條件。

2. 等水深開放外海領域的入射波  $f_0(x,y)$  及繞射波勢函數  $f(x,y)$

等水深開放外海領域的勢函數  $\Psi(x,y,z)$  應為滿足 Laplace 方程式的函

數，因設定外海領域水深為一定的條件，可利用變數分離法將勢函數 $\Psi(x, y, z)$ 分離成為，依靜水面邊界條件決定的與水深 $z$ 有關的已知函數，及與平面位置 $(x, y)$ 有關的未知函數。即勢函數 $\Psi(x, y, z)$ 可以下式表示

$$\psi(x, y, z) = [f_0(x, y) + f(x, y)] \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \quad (2.1)$$

$f_0(x, y)$ 及 $f(x, y)$ 分別表示入射波及繞射波， $k$ 為下列方程式之根

$$\frac{\sigma^2}{g} = kh \tanh kh$$

若入射波 $f_0(x, y)$ 為與 $x$ 軸呈 $\omega$ 角度入射的餘弦波，水面波形 $\zeta_i(x, y; t)$ 可以下式表示

$$\zeta_i(x, y; t) = \zeta_0 \cos[k(x \cos \omega + y \sin \omega) + \sigma t]$$

則入射波勢函數 $f_0(x, y)$ 應為

$$f_0(x, y) = -i \exp[-ik(x \cos \omega + y \sin \omega)]$$

$f(x, y)$ 應為滿足下列Helmholtz方程式的未知函數

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + k^2 f = 0$$

2011 埃及尼羅河之旅

依 Helmholtz 方程式基本解應用所述，對 $f(x, y)$ 的基本解為 $-\frac{1}{4} H_0^{(1)}(kr)$ ，在等水深外海領域與任意地形領域相接假想邊界線 $\Gamma$ 上，依邊界積分方程式應用於 Helmholtz 方程式所述(為說明重複記述)，邊界線 $\Gamma$ 上 $f$ 與其法線方向導函數 $\bar{f} (= \partial f / \partial n)$ 的關係如下

$$F = K \bar{F} \quad (2.2)$$

但積分範圍如圖所示，沿假想邊界線 $BG$ 進行，將假想邊界線 $BG$ 分割成 $M$ 個線分 $(M=M_1+M_2+M_3)$ 。 $H \rightarrow \infty$ ， $AB$ 及 $GH$ 視為完全消波海灘邊界而忽略。

$$K = H^{-1} G$$

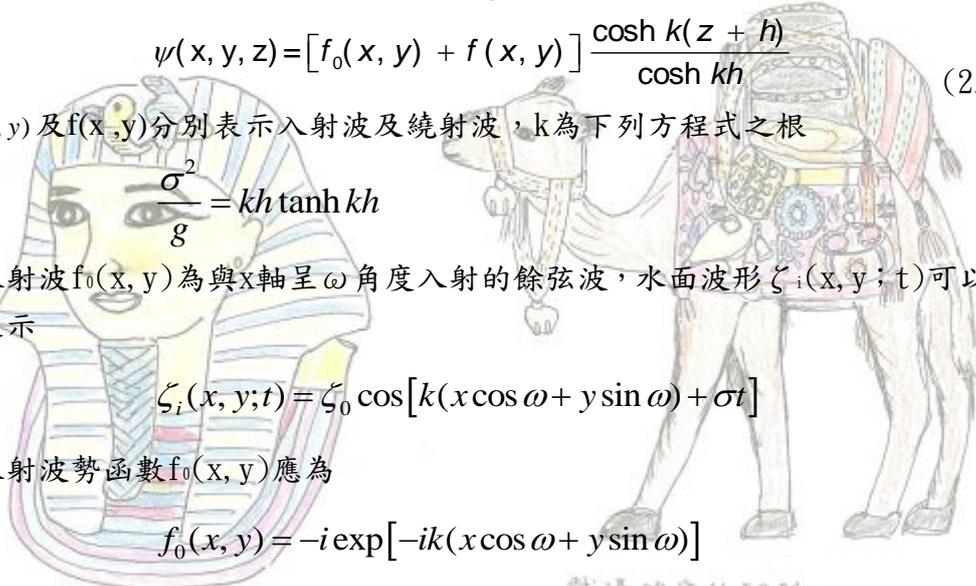
$$F = f_j, \quad \bar{F} = \bar{f}_j, \quad j = 1, 2, \dots, M$$

$$H = H_{ij} = \begin{cases} H_{ij} & i \neq j \\ H_{ij} + \frac{1}{2} & i = j \end{cases}$$

$$G = G_{ij}$$

$H_{ij}$ 及 $G_{ij}$ 數值計算如下

$i \neq j$ 時



載滿珠寶的駱駝

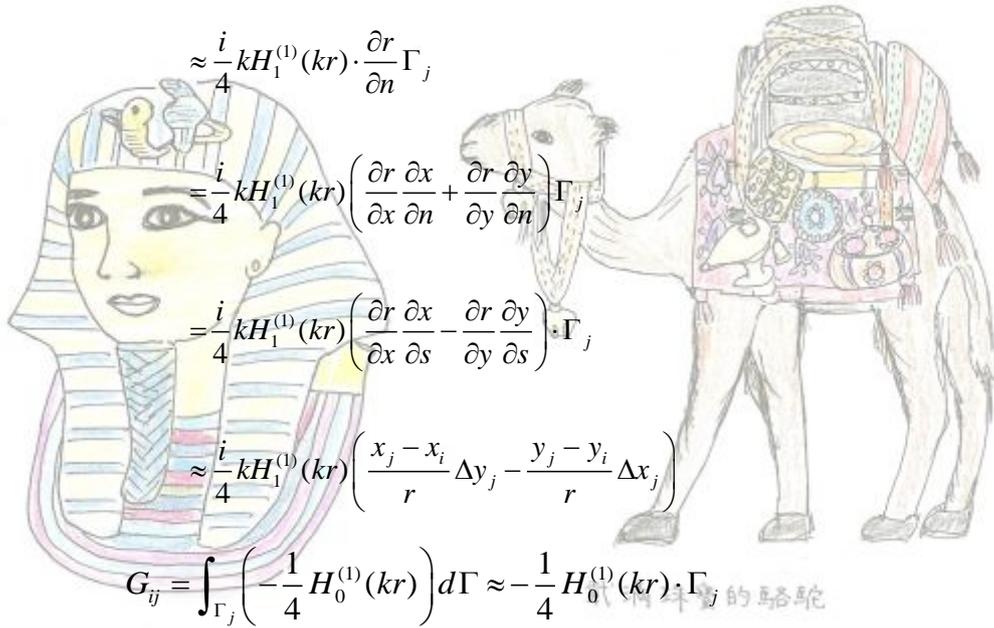


載滿貨品的驢子



阿拉丁神燈

$$H_{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial}{\partial n} \left( -\frac{1}{4} H_0^{(1)}(kr) \right) d\Gamma$$



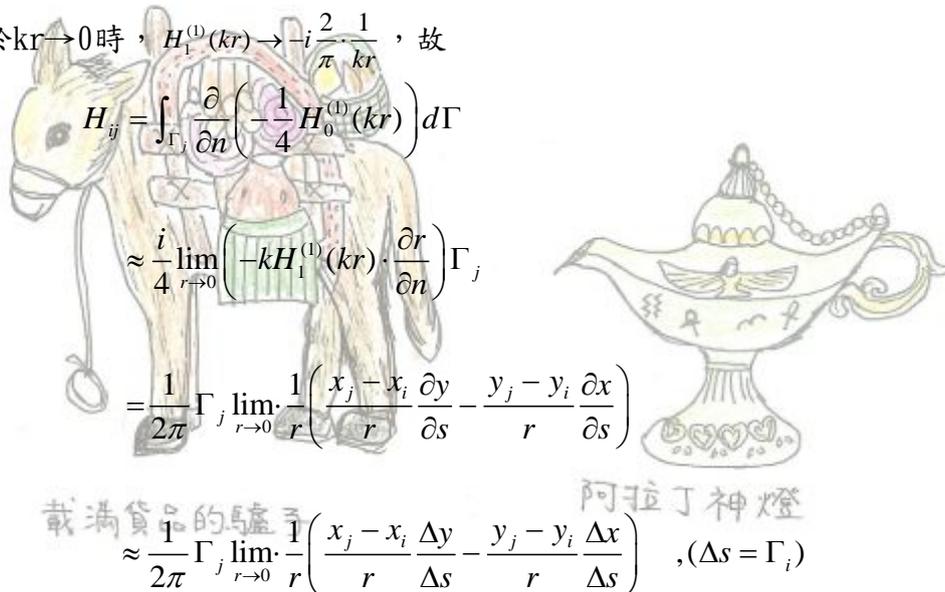
$\approx \frac{i}{4} k H_1^{(1)}(kr) \cdot \frac{\partial r}{\partial n} \Gamma_j$   
 $= \frac{i}{4} k H_1^{(1)}(kr) \left( \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} \right) \Gamma_j$   
 $= \frac{i}{4} k H_1^{(1)}(kr) \left( \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \right) \Gamma_j$   
 $\approx \frac{i}{4} k H_1^{(1)}(kr) \left( \frac{x_j - x_i}{r} \Delta y_j - \frac{y_j - y_i}{r} \Delta x_j \right)$   
 $G_{ij} = \int_{\Gamma_j} \left( -\frac{1}{4} H_0^{(1)}(kr) \right) d\Gamma \approx -\frac{1}{4} H_0^{(1)}(kr) \Gamma_j$

s表示切線

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_j &= \frac{1}{2} (x_{j+1} - x_{j-1}), \Delta y_j = \frac{1}{2} (y_{j+1} - y_{j-1}) \\ r &= \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}, \Gamma_j = \sqrt{(\Delta x_j)^2 + (\Delta y_j)^2} \end{aligned} \right\}$$

i = j時

由於  $kr \rightarrow 0$  時,  $H_1^{(1)}(kr) \rightarrow -i \frac{2}{\pi} \frac{1}{kr}$ , 故



$H_{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial}{\partial n} \left( -\frac{1}{4} H_0^{(1)}(kr) \right) d\Gamma$   
 $\approx \frac{i}{4} \lim_{r \rightarrow 0} \left( -k H_1^{(1)}(kr) \cdot \frac{\partial r}{\partial n} \right) \Gamma_j$   
 $= \frac{1}{2\pi} \Gamma_j \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \left( \frac{x_j - x_i}{r} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{y_j - y_i}{r} \frac{\partial x}{\partial s} \right)$   
 $\approx \frac{1}{2\pi} \Gamma_j \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \left( \frac{x_j - x_i}{r} \frac{\Delta y}{\Delta s} - \frac{y_j - y_i}{r} \frac{\Delta x}{\Delta s} \right), (\Delta s = \Gamma_j)$

將  $x_j - x_i, y_j - y_i, \Delta x / \Delta s$  及  $\Delta y / \Delta s$  對  $\Delta s$  作 Taylor 展開, 因  $i = j$  時,  $r \rightarrow 0$ , 即表示  $\Delta s \rightarrow 0$ , 得

$$H_{ii} = \frac{1}{2\pi} \Gamma_i \cdot \frac{1}{2} (y_{ss} x_s - x_{ss} y_s)_i$$

$$= \frac{1}{4\pi} (y_{ss} x_s - x_{ss} y_s)_i \Gamma_i$$

$kr \rightarrow 0$ 時， $H_0^{(1)}(kr) \rightarrow 1 + i \frac{2}{\pi} (\ln(kr/2) + \gamma)$ ，對元素取平均值，得

$$G_{ii} = \frac{2}{\Gamma_i} \int_0^{\Gamma_i/2} \left[ 1 + i \frac{2}{\pi} \left( \ln \frac{kr}{2} + \gamma \right) \right] dr \cdot \Gamma_i$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ \gamma - 1 + \ln \frac{k\Gamma_i}{2} - i \frac{\pi}{2} \right] \cdot \Gamma_i$$

$\gamma = 0.577216 \dots$  (Euler常數)

### 3. 任意地形領域的勢函數 $\varphi(x, y, z)$

如圖，將3維封閉任意地形領域分成假想邊界面 $A_1$ 、靜水面 $A_2$ 、消能岸壁(包含防波堤) $A_3$ 及任意水深海底面 $A_4$ 等4部分，採用四邊形一定元素，將各邊界面分割成 $n_1$ 、 $n_2$ 、 $n_3$ 、 $n_4$ 個面元素，共計為 $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$ 個面元素。依3維邊界元素法所述(為說明重複記述於下)

滿足3維Laplace方程式基本解 $\phi^*$ 為

$$\phi^* = 1/(4\pi r)$$

邊界面 $A_1$ 的邊界條件為 $\phi = q$ ， $A_2$ 的邊界條件為 $\partial\phi/\partial n = \bar{\phi} = \bar{q}$ ，全邊界 $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ 的邊界積分方程式如下

$$\frac{1}{2} \phi_i + \int_A \phi \bar{\phi}^* dA = \int_{\Gamma} \bar{\phi} \phi^* dA$$

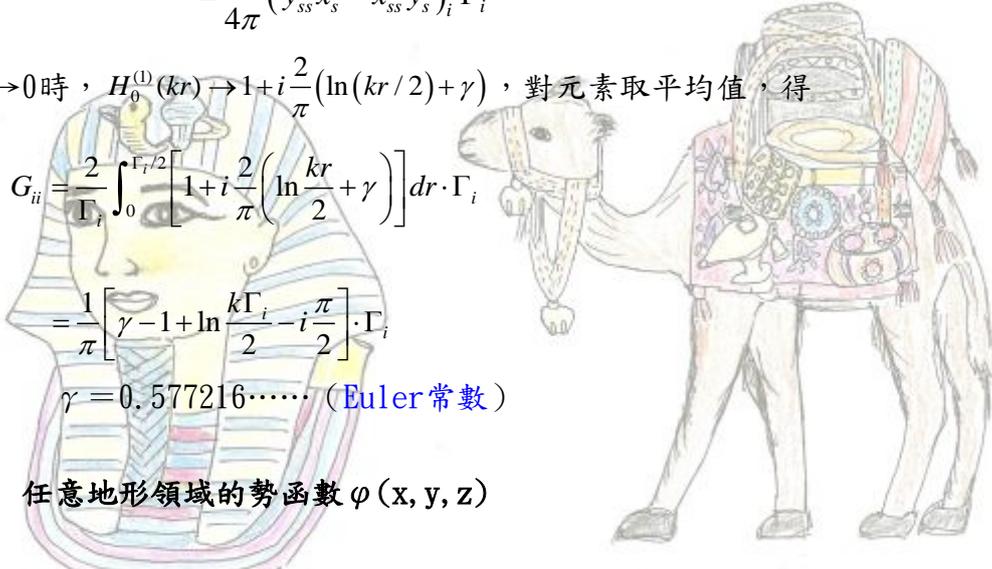
假定四邊形元素內函數值為定值，以元素重心或兩對角線交點作為節點，其函數值作為該元素代表值，將上式所示邊界積分方程式離散成下列和分方程式

$$\frac{1}{2} \phi_i + \sum_{j=1}^n \phi_j \int_{A_j} \bar{\phi}^* dA = \sum_{j=1}^n \bar{\phi}_j \int_{A_j} \phi^* dA \quad (3.1)$$

上式對特定點 $i$ 成立，式中

$$\int_{A_j} \bar{\phi}^* dA$$

表示節點 $i$ 與被積分元素 $j$ 間有關的積分，將此積分以下式表示

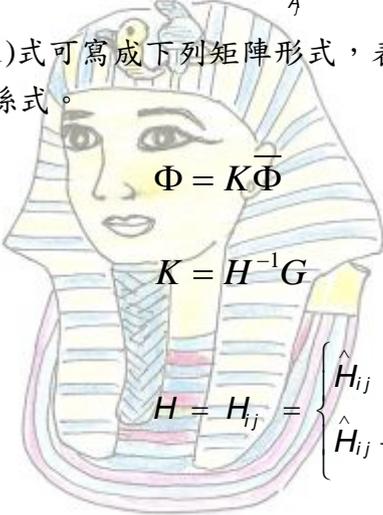


$$\hat{H}_{ij} = \int_{A_j} \bar{\phi}^* dA$$

同樣令

$$G_j = \int_{A_j} \phi^* dA$$

(3.1)式可寫成下列矩陣形式，表示邊界面勢函數 $\phi$ 與其法線方向導函數 $\bar{\phi}$ 間的關係式。



$\Phi = K\bar{\Phi}$

$K = H^{-1}G$

$H = H_{ij} = \begin{cases} \hat{H}_{ij} & i \neq j \\ \hat{H}_{ij} + \frac{1}{2} & i = j \end{cases}$

$G = G_{ij}$



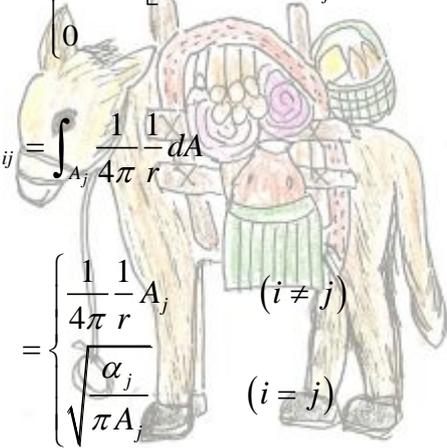
載滿珠寶的駱駝

$$H_{ij} = \int_{A_j} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{4\pi r} dA = - \int_{A_j} \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial n} dA$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{4\pi r^2} \left[ \frac{x_j - x_i}{r} \left( \frac{\partial x}{\partial n} \right)_j + \frac{y_j - y_i}{r} \left( \frac{\partial y}{\partial n} \right)_j + \frac{z_j - z_i}{r} \left( \frac{\partial z}{\partial n} \right)_j \right] A_j & (i \neq j) \\ 0 & (i = j) \end{cases}$$

$$G_{ij} = \int_{A_j} \frac{1}{4\pi r} dA$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{4\pi r} A_j & (i \neq j) \\ \sqrt{\frac{\alpha_j}{\pi A_j}} & (i = j) \end{cases}$$





阿拉丁神燈

$$r = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}$$

$$\alpha_j = \frac{\int_0^{2\pi} a(\theta) d\theta}{2\sqrt{\pi A_j}}$$

$a(\theta)$  表示該元素中點至周邊任意一點的距離， $\alpha_i$  表示該元素形狀修正係數，元素形狀為圓形時  $\alpha=1$ ，正方形元素  $\alpha=0.9945$ 。

#### 4. 假想邊界面 $A_1$ 的邊界條件

依假想邊界面及消波岸壁的邊界條件所述(為說明重複記述)如下。

假想邊界面  $\Gamma$  上  $f$  與  $\bar{f}$  的關係依2. (2.2) 式所述如下式

$$F = K \bar{F} \quad (4.1)$$

任意地形領域內波運動速度勢為  $\phi(x, y, z)$ ，等水深外海領域與任意地形領域相接假想邊界面，由於流體運動引起質量及能量流束必須連續條件得

$$\phi(x, y, z) = [f_0(x, y) + f(x, y)] \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \quad (4.2)$$

$$\bar{\phi}(x, y, z) = [\bar{f}_0(x, y) + \bar{f}(x, y)] \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \quad (4.3)$$

將(4.3)式2邊各乘以  $\cosh k(z+h)$ ，並對  $z$  從  $-h$  積分至  $0$ ，得

$$\int_{-h}^0 \bar{\phi}(x, y, z) \cosh k(z+h) dz = \int_{-h}^0 [f_0(x, y) + f(x, y)] \frac{\cosh^2 k(z+h)}{\cosh kh} dz \quad (4.4)$$

將假想邊界面  $A_1$  對水深及水平方向各分割成  $N$  及  $M$  個元素，假想邊界面  $\Gamma$  分割成  $M$  個線分(進行離散時對每個線分，在水深方向取  $N$  個元素)，上式可寫成下列離散形式

$$\bar{f}_i = \frac{k}{N_0 \sinh kh} \sum_{j=1}^N \bar{\phi}_j \cosh k(z_j + h) \Delta z_j - \bar{f}_0, \quad i=1, 2, \dots, M \quad (4.5)$$

$$N_0 = \frac{1}{2} \frac{1+2kh}{\sinh 2kh}$$

從(4.2)式得

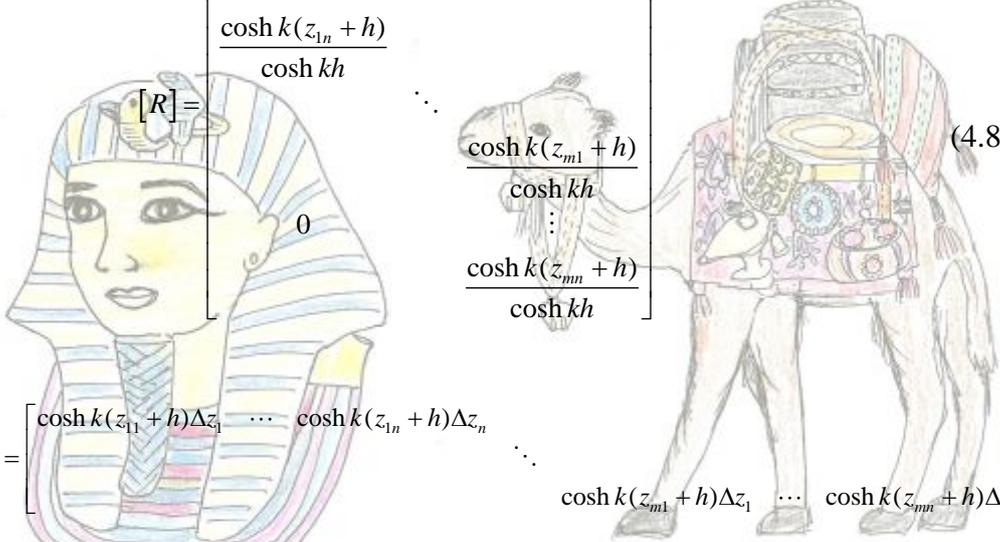
$$\phi_1^{mi} = [f_{0m} + f_m] \frac{\cosh k(z_j + h)}{\cosh kh} \quad m=1, 2, \dots, M \quad (4.6)$$

$$j=1, 2, \dots, N$$

利用(4.1)式，整理(4.5)及(4.6)式，得假想邊界面  $\Gamma_1$  上  $\phi$  與  $\bar{\phi}$  的關係如下

$$[\phi] = [R][F_0 - K \bar{F}_0] + c[R][K][Q][\bar{\phi}] \quad (4.7)$$

$$c = k / (N_0 \sinh kh)$$



$$[R] = \begin{bmatrix} \frac{\cosh k(z_{11} + h)}{\cosh kh} & & & 0 \\ \vdots & & & \\ \frac{\cosh k(z_{1n} + h)}{\cosh kh} & & & \\ \vdots & & & \\ \frac{\cosh k(z_{m1} + h)}{\cosh kh} & & & \\ \vdots & & & \\ \frac{\cosh k(z_{mn} + h)}{\cosh kh} & & & \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} \cosh k(z_{11} + h)\Delta z_1 & \cdots & \cosh k(z_{1n} + h)\Delta z_n & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \\ \cosh k(z_{m1} + h)\Delta z_1 & \cdots & \cosh k(z_{mn} + h)\Delta z_n & \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$f_{0j}(x, y) = -i \exp[-i k(x_j \cos \omega + y_j \sin \omega)]$$

$$\bar{f}_{0j}(x, y) = -k \left[ \cos \omega \left( \frac{\partial x}{\partial n} \right)_j + \sin \omega \left( \frac{\partial y}{\partial n} \right)_j \right] \exp[-i k(x_j \cos \omega + y_j \sin \omega)]$$

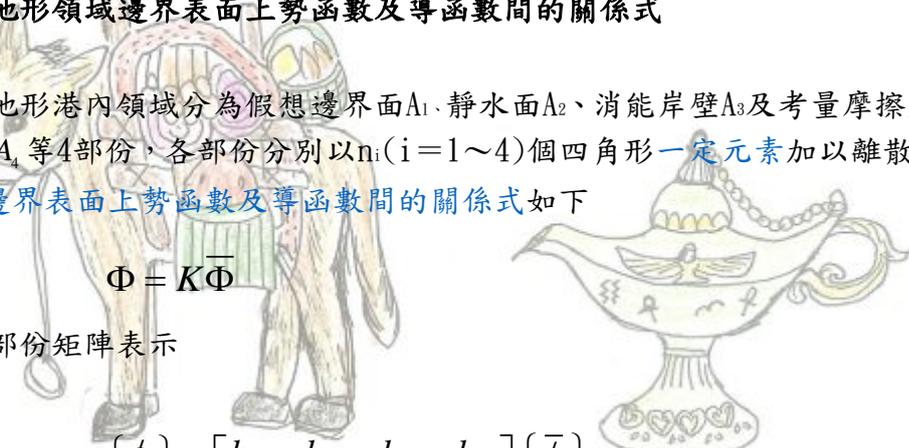
$$j=1,2,\dots,M \quad (4.10)$$

### 5. 任意地形領域邊界表面上勢函數及導函數間的關係式

任意地形港內領域分為假想邊界面 $A_1$ 、靜水面 $A_2$ 、消能岸壁 $A_3$ 及考量摩擦效應海底面 $A_4$ 等4部份，各部份分別以 $n_i$  ( $i=1\sim 4$ )個四角形一定元素加以離散， $n_i=M \times N$ ，邊界表面上勢函數及導函數間的關係式如下

$$\Phi = K \bar{\Phi}$$

可以下列部份矩陣表示



$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \bar{\phi}_2 \\ \bar{\phi}_3 \\ \bar{\phi}_4 \end{bmatrix}$$

## 5. 連立方程式

將1.~3. 所示各項邊界條件代入上式得

$$\begin{bmatrix} K_{11} - c[R][K^*][Q] & \frac{\sigma^2}{g} K_{12} & i\alpha K_{13} & i\alpha_f K_{14} \\ K_{21} & \frac{\sigma^2}{g} K_{22} - I & i\alpha K_{23} & i\alpha_f K_{24} \\ K_{31} & \frac{\sigma^2}{g} K_{32} & i\alpha K_{33} - I & i\alpha_f K_{34} \\ K_{41} & \frac{\sigma^2}{g} K_{42} & i\alpha K_{43} & i\alpha_f K_{44} - I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [R][F^o - K^* \bar{F}^o] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

由上式可求得假想邊界面、靜水面、具有任意消能係數岸壁及具有摩擦效應海底面的  $\bar{\phi}_1$ 、 $\phi_2$ 、及  $\phi_3$  及  $\phi_4$  值。任意點波高與入射波波高之比值  $K_D$  為

$$K_D = |\phi_2|$$

載滿珠寶的駱駝

回分類索引及尼羅海洋工作站



載滿貨品的驢子



阿拉丁神燈