

非線性波之遡上研究

周宗仁* 馮德榮**

摘 要

為探討非線性波在光滑直立壁或斜坡面岸壁附近之水面波形變化，本文在此提出數值計算方法，先依線性水波理論利用邊界積分方程式，求出在二維度領域內自由水面之波形，並推算出波浪之相對遡上高度。當線性水面波形求出後，先視其為一初期值，考慮自由水面邊界條件式之非線性項並將其差分化，同時引用距離岸壁無限遠處之輻射條件 (Radiation Condition)，再將初期值代入差分式，同樣地運用邊界積分方程式，可求出下一微小時刻之水面波形，此時所求之水面波形是為非線性水面波形。依上述程序反覆運算可求出一系列時間歷延之自由水面波形變化，最大遡上高度可藉而求得之。本文並以 90° 光滑直立壁所求得之線性及非線性水面波形分別與 Stokes 第一階及第四階理論解析得之自由水面波形作一比較，結果甚為吻合。

一、前 言

當外海入射波浪衝擊至海岸或結構物時，若結構物高度足以不使波浪越過 (Overtopping)，則波浪必會沿其接觸坡面而爬升，其爬升之最頂點與靜水位線間之垂直距離稱為遡上高度 (Run-up Height)。遡上高度之大小直接影響到結構物經濟斷面之選定，故如何尋求避免產生最大遡上高度之斜坡斷面，對於工程設計、施工而言，是個重要的考慮因素之一。本文將以無因次量 R/H (Relative Run-up Height) 來表示遡上高度。

有關波浪遡上的研究，在 1956 年以前仍是以實驗結果來分析歸納為主流，當時學者認為若以線性波理論為基礎，則進行波終會在斜坡岸壁上發生碎波現象，故其遡上高度仍多數含有碎波後再爬升之情況 [Saville, 1956]。直至 [Carrier and Greenspan, 1958] 依非線性淺水波理論，以數值計算分析二維度不透水均勻斜坡岸壁上之自由水面波形變化，結果顯示波浪能夠沿著斜坡接觸面爬升而不發生碎波。此理論發表

* 國立台灣海洋學院河海工程學系教授

** 國立台灣海洋學院河海工程學系助教

後，探討有關斜坡面上波形變化之理論乃相繼問世，如〔 Nobuo Shuto, 1967, 1972 〕利用拉氏法解析長波在二維度斜坡面接連等水深海底所構成之有限領域上之水粒子運動情形，而得相對遡上高度：

$$R/H = [J_0^2(4\pi \ell/L) + J_1^2(4\pi \ell/L)]^{-1/2}$$

其中 J_n , $n=0,1$ 為第一類第 n 階 Bessel 函數, $\ell = h/\tan \alpha$, h 為水深, α 為坡度, L 為波長。因其理論出發點即限制為長波, 故適應範圍小。另外以 SUMMAC 法, 來分析非壓縮流在瞬變條件下, 水面波形變化及水粒子運動速度分佈者, 首推〔 Robert K.-C. CHAN and Robert L. Street, 1970 〕, 其主要以 Navier - Stokes 方程式來決定流體流動形態, 程式中非線性項及黏性項均保留, 能有效地描繪孤立波在直立壁時之遡上情況, 若要應用於斜坡面時, 則必須將邊界條件重新修定。而對於自由水面上尖銳波形之變化有深入且詳盡地描繪者該推 M. S. Longuet-Higgins; F.R.S. and E.D. Crokelet,〔 1976 〕。其方法乃是將所求領域內之自由水面波形經特殊座標轉換, 使形成一封閉曲線, 再交替應用尤拉氏法及拉氏法以求出下一微小時刻之自由水面波形, 依此可描繪至將發生碎波或波浪翻滾碎落之前。

由往昔之實驗結果及多數學者之理論研究顯示, 影響相對遡上高度之主要因素有: $\sigma^2 h/g$, 水深週期比; H/L , 波形尖銳度; h/H , 水深波高比; K_r , 反射率; S , 海底比降; α , 堤面坡度; n , 粗糙度, E , 空隙率……等。

在解邊界值問題中, 對於邊界條件中之非線性項之處理極為困難, 因此在線性理論中都將非線性項忽略。本文在此乃應用邊界積分方程式, 提出一方法, 即在求出線性波理論之 ϕ 及 ζ 後, 先視其為初期值, 再考慮自由水面邊界條件式之非線性項並將其差分化, 再將初期值代入差分式, 同樣地運用邊界積分方程式, 即可求出下一 Δt 時刻之 Φ , ζ ; 此時所得之水面波形即為非線性水面波形, 若依此程序反覆運算, 則可得 $t = n\Delta t$ ($n=1, 2 \dots$) 之有限振幅波形。

本文理論不考慮碎波情況, 分別以 90° , 60° , 45° 及 30° 等岸壁進行數值計算, 並以 90° 直立岸壁例之線性及非線性波形與 Stokes 第一階及第四階理論所得之波形相比較, 且與實驗室資料相互驗證〔周宗仁、韓文育, 1982〕, 以期能將所得結果, 提供設計海堤、防波堤, 離岸人工島及核能電廠等重要海岸結構物時, 估計遡上高度之依據。

二、微小振幅波理論

1 基本假定與速度勢之表示法

假設 (I)、(II) 兩流體領域內 (加圖 1 所示)。均為非壓縮, 非黏性, 非旋轉之理想流體所充滿, 則其運動持有速度勢 $\Phi(X, Z; t)$ 。當外海領域 (I) 有一振幅為 ζ 之波浪入射至領域 (II) 時, 則第二領域之速度勢可表示為

$$\Phi(x, z; t) = \frac{g\zeta_0}{\sigma} \phi(x, z) e^{i\sigma t} \quad (1)$$

式(1)必須滿足 Laplace 方程式 $\nabla^2 \Phi = 0$ 。假定在假想邊界面 ($X = L$) 之向外海側之 (I) 領域內之流體運動不受散射波 (Scattering Wave) 之影響, 則其速度勢可表示為:

$$\phi(x, z) = [e^{ik(x-L)} + \phi e^{-ik(x-L)}] \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \quad (2)$$

式(2)中 ϕ 為反射率, k 為 $\sigma^2 h/g = kh \tanh kh$ 之根。而其法線方向之速度勢可表為:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = [ike^{ik(x-L)} - ik\phi e^{-ik(x-L)}] \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \quad (3)$$

在不透水海底及斜坡面上, 法線方向流速為零, 即 $\partial \phi / \partial \nu = 0$; 自由水面之動力學及運動學邊界條件, 由於壓力連續並忽略非線性項, 而得

$$\phi = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\sigma^2}{g} \phi \quad \text{在 } z = 0 \text{ 處} \quad (4)$$

2 Green 函數之選定

假設 $\phi(x, z)$ 在第 (II) 領域中可滿足 Laplace 方程式, 且其存在二次導函數, 吾人可選用適當之 Green 函數, 例如 $\ln \frac{1}{r}$; 為其特別解。故依 Green 定理 (Green's Second Identity Laws): 在領域 (II) 之內部點 $p(x, z)$ 其速度勢可以下列積分方程式來表示。

$$\phi_D(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int \left[\frac{\partial \phi(\xi, \eta)}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} - \phi(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right] ds \quad (5)$$

若點 $p(x, z)$ 移至邊界線上時, 由 Green 函數之特異性, 其速度勢可表為:

$$\phi_B(x, z) = \frac{1}{\pi} \int \left[\frac{\partial \phi(\xi, \eta)}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} - \phi(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right] ds \quad (6)$$

上二式中， $\phi(\xi, \eta)$ 表邊界線上之速度勢函數值， $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (z-\eta)^2}$

3 線性元素與元素無次度座標化

為描述兩節點間之物理量呈線性變化之特性，乃採用一次度線性元素為分離化元素。線性元素全體系座標及無次度座標（如圖二所示）。故在元素 e_i 中， ξ 與 x 間之關係為 $\xi = (2x - x_{i+1} - x_i) / \Delta x_i$ ，而 ϕ ， $\bar{\phi}$ 則可表示如下

$$\phi = M_1 \phi_i + M_2 \phi_{i+1}; \quad \bar{\phi} = M_1 \bar{\phi}_i + M_2 \bar{\phi}_{i+1} \quad (7)$$

其中 $M_1 = \frac{1}{2}(1-\xi)$ ， $M_2 = \frac{1}{2}(1+\xi)$ ， M_1, M_2 稱為形狀函數。在此並引用 Gauss 積分方式，逐序將各元素內之函數積分值求出，其公式表之如下：

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^N W_i f(\xi_i) \quad (8)$$

上式中， W_i 表權重 ($i=1 \sim N$)， N 為元素內之積分選點數。

4 積分方程式之分離化

若利用前節所提之線性元素，將積分方程式(6)沿邊界線分割成 n 個元素，在各元素之兩端上各設置節點，對元素 e_i 之兩節點座標分別以 (x_i, z_i) 及 (x_{i+1}, z_{i+1}) 表之，並將(7)式代入積分式中，則(6)式可以下式之分離化形式表示之。

$$\begin{aligned} \phi_i(x, z) + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} [\phi_j(\xi, \eta) M_1 + \phi_{j+1}(\xi, \eta) \cdot M_2] \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} ds \\ = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} [\bar{\phi}_j(\xi, \eta) M_1 + \bar{\phi}_{j+1}(\xi, \eta) \cdot M_2] \ln \frac{1}{r} ds \end{aligned} \quad (9)$$

令

$$\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_j} [\phi_j(\xi, \eta) \cdot M_1 + \phi_{j+1}(\xi, \eta) \cdot M_2] \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} ds = [h^1_{ij}, h^2_{ij}] \left\{ \frac{\phi_j}{\phi_{j+1}} \right\} \quad (10)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_j} [\bar{\phi}_j \cdot M_1 + \bar{\phi}_{j+1} \cdot M_2] \ln \frac{1}{r} ds = [g^1_{ij}, g^2_{ij}] \left\{ \frac{\bar{\phi}_j}{\bar{\phi}_{j+1}} \right\} \quad (11)$$

故可將(9)式以下式表之

$$\begin{aligned} \phi_i + (h^1_{ij}) \phi_j + (h^2_{ij} + h^1_{i,j}) \phi_{j+1} + \dots + (h^2_{i,j=N}) \phi_{j=N} \\ = (g^1_{ij}) \bar{\phi}_j + (g^2_{ij} + g^1_{i,j}) \bar{\phi}_{j+1} + \dots + (g^2_{i,j=N}) \bar{\phi}_{j=N} \end{aligned} \quad (12)$$

將(12)式簡化成

$$\begin{aligned} \phi(I) + H(I, J)\phi(J) + H(I, J+1)\phi_{J+1} + \dots + H(I, J=N)\phi_{J=N} \\ = G(I, J)\bar{\phi}(J) + G(I, J+1)\bar{\phi}_{J+1} + \dots + G(I, J=N)\bar{\phi}_{J=N} \end{aligned} \quad (13)$$

再化為矩陣形式

$$[H+I][\phi] = [G][\bar{\phi}] \quad \text{即} \quad [\phi] = [HH][\bar{\phi}] \quad (14)$$

上式中 $[HH] = [H+I]^{-1}[G][\bar{\phi}]$, I 代表單位矩陣。另外在假想邊界面 ($X=L$) 處由於必須滿足能量流束 (energy flux) 及質量流束 (mass flux) 連續之條件, 故得下式:

$$\phi_1(x, z) = \phi_2(x, z); \quad \bar{\phi}_1(x, z) = \bar{\phi}_2(x, z) \quad (15), (16)$$

5. 微小振幅速度勢

將(3)式代入(16)式, 二邊各乘 $\cosh(z+h)$, 再由 $z = -h \sim 0$ 積分, 可得

$$\phi = 1 + i / (N \sin kh) \int_{-h}^0 \bar{\phi} \cosh kh(z+h) ds \quad (17)$$

其中 $N_0 = \frac{1}{2}(1 + 2kh / \sin h^2 kh)$ 。若將(17)式代入(15)式, 則可求出假想邊界面上各節點之速度勢, 若將其化為矩陣式, 得

$$\{\phi_1\} = \{Z\} + \{FF\} \quad (18)$$

今在假想面上設定 N_1 個節點數, 自由水面 N_2 個, 斜坡面及海底共設定 N_3 個節點, 則(14)式可改寫成

$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} HH_{11} & HH_{12} & HH_{13} \\ HH_{21} & HH_{22} & HH_{23} \\ HH_{31} & HH_{32} & HH_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \bar{\phi}_2 \\ \bar{\phi}_3 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

其中 $\{\phi_i\}$, $\{\bar{\phi}_i\}$, ($i=1, 2, 3$) 分別為各邊界面上之子矩陣。考慮不透水海底條件, 則上式可得

$$\begin{Bmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \bar{\phi}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} HH_{11} & HH_{21} \\ HH_{21} & HH_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \bar{\phi}_2 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

將(18)式及(4)式代入(20)式, 可得

$$\begin{Bmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \bar{\phi}_2 \end{Bmatrix} = [B]^{-1} \begin{Bmatrix} Z \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

$$B = \begin{bmatrix} \{[HH_{11} - (FF)]\} & \{\Gamma \cdot HH_{12}\} \\ \{HH_{21}\} & \{\Gamma \cdot HH_{22}\} & \{I\} \end{bmatrix}$$

其中 $\Gamma = \sigma^2 h/g$, $\{I\}$ 為單位矩陣。由(2)可求得假想邊界面上法線方向速度勢 $\bar{\phi}_1$ 及自由水面之速度勢函數值 ϕ_2 , 由於 $\zeta = -1/g (\partial \Phi / \partial t)$, 得下式

$$\zeta / \zeta_0 = -i \phi_2 e^{i\sigma t} \quad (22)$$

由(22)式得 波高比 $\zeta / \zeta_0 = |\phi_2|$

若給定入射波振幅 ζ_0 , 即可得微小振幅波之波形, 因不考慮碎波情況; 故自由水面與斜坡面接觸處之 ζ 值即可視為壟上高度。

三、有限振幅波理論

進行有關非線性波之研究, 主要目的乃在探討增加考慮自由水面運動及動力邊界條件之非線性項後, 對波形變化之影響程度為何。因此時方程式已屬非線性, 故須以近似法求解之, 而一般解析時常使用疊代法 (iteration) 或微小時間間隔法 (time step-by-step), 故運算時須先給一初期值以便計算出歷經 $n \Delta t$ 時刻後之變化情況。本文在此將微小振幅理論所求出之 ϕ_2 及 ζ 代入 $\Phi = g \zeta_0 / \sigma \phi_2 e^{i\sigma t}$ 及 $\zeta = -i \zeta_0 \phi_2 e^{i\sigma t}$ 兩式中, 並以此時所得之 Φ 及 ζ 值視為求解非線性波時之初期值, 並採用微小時間間隔法, 以進行數值計算, 能將斜坡面上之波形變化順利描繪出來。

1 非線性邊界條件

(1) 在二維度時, 自由水面之動力及運動邊界條件分別表示如下

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + g \zeta = 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (24)$$

(2) 輻射條件 (Radiation Condition)

至目前為止, 非線性之輻射條件尚未發現。然只要所定之假想邊界面, 不會嚴重影響到所欲求解之值時, 下列之輻射條件仍將適用。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -k/\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (25)$$

上式中乃將 $C = \sigma/k$ 代入後而得。

2 差分法

(1) 首先將自由水面邊界條件差分法。令邊界積分方程式是依反時針方向進行, 且法線

方向是向外的，若以 β 表示自由水面上兩節點間之線段與水平線間之夾角，則

$\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ ， $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ 可以垂直水面分量及切量分量之 $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ 及 $\frac{\partial \Phi}{\partial s}$ 來表示

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} \sin \beta - \frac{\partial \Phi}{\partial s} \cos \beta ; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} \cos \beta + \frac{\partial \Phi}{\partial s} \sin \beta \quad (26), (27)$$

將(26)、(27)式代入(24)式可得 $\partial \zeta / \partial t = \frac{1}{\cos \beta} \frac{\partial \Phi}{\partial n}$ ，將其化為差分化式，則得

$$(\zeta^{k+1})_j = (\zeta^k)_j + \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{1}{\cos \beta^{k+1}} (\Phi_n^{k+1})_j + \frac{1}{\cos \beta^k} (\Phi_n^k)_j \right] \quad (28)$$

當 Δt 為微小值時，水面波形變化不大，於是可令 $\cos \beta^{k+1} = \cos \beta^k$ ， Φ_n^{k+1} 乃代表 $(k+1)\Delta t$ 時刻之 $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ 值。〔劉立方，1983〕

將(26)、(27)及(28)式代入(23)式，經化簡後，得

$$(\Phi_n^{k+1})_j = 1 - c/b (\Phi^{k+1})_j + \frac{c}{b} (\Phi^{k+1})_{j-1} - a/b \quad (29)$$

其中 a, b, c 均為已知常數，

$$a = (\Phi^k)_j - g \cdot \Delta t (\zeta^k)_j - g \frac{(\Delta t)^2}{2} \cdot \frac{1}{\cos \beta^k} \cdot (\Phi_n^k)_j ;$$

$$b = \frac{-g \Delta t^2}{2} \cdot \frac{1}{\cos \beta^{k+1}} - \frac{\Delta t}{2} \cdot (\Phi_n^k)_j ;$$

$$c = -\Delta t / 2 \cdot \frac{1}{\Delta s} \cdot \frac{(\Phi^k)_j - (\Phi^k)_{j-1}}{\Delta s} ; \Delta s$$

表示兩節點間之距離。

(2) 將輻射條件(25)式差分化為

$$(\Phi^{k+1})_j = d + e \cdot (\Phi_n^{k+1})_j \quad (30)$$

式中 $d = (\Phi^k)_j + (\Phi_n^k)_j \cdot (\Delta t / 2 \cdot \sigma / -k)$; $e = (\Delta t / 2 \cdot \sigma / -k)$

3 有限振幅速度勢解析

引用之 Green 公式與前章相同，如(6)式，再度化為矩陣式：

$$[H][\Phi] = [G][\Phi_n] \quad (31)$$

其中 $[H] = [HH+I]$ ；表成各邊界面上之子矩陣式：

$$\begin{Bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} [\Phi]_I \\ [\Phi]_{II} \\ [\Phi]_{III} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} [\Phi_n]_I \\ [\Phi_n]_{II} \\ [\Phi_n]_{III} \end{Bmatrix} \quad (32)$$

將(29)，(30)式代入(32)式，經簡化後可得下列矩陣：

$$\begin{Bmatrix} [\Phi_n]_I^{K+1} \\ [\Phi]_{II}^{K+1} \\ [\Phi]_{III}^{K+1} \end{Bmatrix} = [V]^{-1} [F] \begin{Bmatrix} [d]_I^K \\ [-a/b]_{II}^K \\ [\Phi_n]_{III}^K \end{Bmatrix} \quad (33)$$

(33)式中

$$[V] = \begin{bmatrix} H_{11} \cdot e - G_{11} & H_{12} - [G_{1,j} \cdot (\frac{1-c}{b})_j^K] - [G_{1,j} \cdot (\frac{c}{b})_{j+1}^K] & H_{13} \\ H_{21} \cdot e - G_{12} & H_{22} - [G_{2,j} \cdot (\frac{1-c}{b})_j^K] - [G_{2,j} \cdot (\frac{c}{b})_{j+1}^K] & H_{23} \\ H_{31} \cdot e - G_{13} & H_{23} - [G_{3,j} \cdot (\frac{1-c}{b})_j^K] - [G_{3,j} \cdot (\frac{c}{b})_{j+1}^K] & H_{33} \end{bmatrix}$$

$$[F] = \begin{bmatrix} -H_{11} & G_{12} & G_{13} \\ -H_{21} & G_{22} & G_{23} \\ -H_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix}$$

取適當之 Δt ，則(33)式等號右邊為已知，左邊為未知，故可求出 $(K+1)\Delta t$ 時刻之 $[\Phi_n]_I^{K+1}$ ， $[\Phi]_{II}^{K+1}$ 值依(33)式即可求出 $(K+1)\Delta t$ 之 ζ 值，依(30)式即可求得 $(K+1)\Delta t$ 之 $[\Phi]_I^{K+1}$ 值。依此程序反覆運算，則可求得 $N\Delta t$ 時刻之水面波形 ($N=1, 2 \dots$)，而非線性波在斜坡面上之壩上高度當可藉而求得。

四、數值計算與結果討論

作數值計算時，取水深為代表單位，假想邊界面定於向外海側大於 6~7 倍水深處，在假想邊界面設定 10 點，自由水面設定 40 點，斜坡面設定 10 點，海底設定 30 點，共 90 個節點（如圖 3 所示），以求得不同坡度在不同之波浪條件作用下之波形變化。1 微小、有限振幅理論值與 Stokes 第一階，第四階理論值之比較。

為探討本文所提方法之可靠性及結果之精確度，以 90° 直立壁為例，分別與

Stokes 第一階及第四階所得之自由水面波形及 R/H 值作一比較，如圖 4 至圖 7 所示。由結果顯示(1)微小振幅理論所得之自由水面波形對靜止水位線呈上、下完全對線狀，且其 R/H 值為 1，此結果與 Stokes 第一階理論值完全吻合。(2)以靜水位線為基準，有限振幅理論所求出之波形，其波峯比微小振幅高，而波谷 ($z < 0$) 比微小振幅小，此趨勢又與 Stokes 者相同。(3)以靜水位線為基準，依有限振幅所求出之 R/H 值比 Stokes 第四階理論值稍大。(4)依有限振幅理論所求得之波形變化可看出其波節點位於靜水位線上方，而 Stokes 第四階所得之波節點仍落在靜水位線上，此乃 Stokes 者於每一階求解波形變化時皆令平均水面與靜水面一致，而本文僅依 Green 定理沿邊界線作積分計算，並無對所求出波形作類於 Stokes 氏之處理，但若將有限振幅之波形整體向下位移至靜水位線附近，此時之波形亦與 Stokes 第四階所得之波形極為相近。〔合田良實、柿崎秀作，1966〕。

2 微小振幅與有限振幅之遡上比較

圖 8~圖 11，分別表示 $\alpha = 90^\circ, 45^\circ, 30^\circ$ 時在 $\sigma^2 h/g = 0.5$ 時之波形比值。由圖形得知，無論在直立壁或斜坡面時，在相同波浪條件下，以 30° 斜坡面所得 R/H 值為最大，且有限振幅理論所得之 R/H 值比微小振幅理論值大。

3 有限振幅在斜坡面時之波形變化

圖 12~圖 15 圖形垂直軸 ζ/ζ_0 。放大比例比水平軸大。

由半週期波形變化圖可以發現，不同斜坡面，在不同波浪條件下，其波節點在靜水位線上方約 ($0 \sim 0.8 \zeta/\zeta_0$) 之範圍內變動。圖 16~圖 19， ζ/ζ_0 軸與 X 軸之比例尺相同，由圖形看出，在固定斜坡上，其遡上高度依入射波高之大小而幾呈線性增減。

4 理論 R/H 值與 $\sigma^2 h/g$ 之關係

圖 20：微小振幅時 R/H 值與 $\sigma^2 h/g$ 之關係 ($\zeta_0 = 0.05 h$)；圖 21：有限振幅理論之 R/H 值與 $\sigma^2 h/g$ 之關係 ($\zeta_0 = 0.05 h$) 圖 22：有限振幅理論 R/H 值與 $\sigma^2 h/g$ 之關係 ($\zeta_0 = 0.08 h$)。

由圖發現(1)在 $\sigma^2 h/g = 0.5$ 時， $\alpha = 30^\circ$ 時會產生最大 R/H 值。(2)當 $\alpha = 60^\circ$ 時，無論是微小或有限振幅其 R/H 值會隨 $\sigma^2 h/g$ 值之增大而變大。(3)由圖 21 及圖 22 得知，當 λ 射波振幅不同時，其所產生之 R/H 值大致相同。

5 理論 R/H 值與實驗值比較

為檢驗本文所求之 R/H 值是否合理可靠，除第 1 節與 Stokes 所得結果相比較外，並與〔周、韓，1982〕所做之實驗值相互驗證比較。如圖 23~圖 25。結果顯示

(1)有限振幅理論所得之 R/H 值與實驗結果極為相符。(2)由微小振幅理論所得之 R/H 值與小入射波高時之實驗結果較為接近。因此應用有限振幅理論可具體的描繪出近於實際的波形變化及波浪邇上高度。

6. 穩定性之探討

一般對進行波作數值計算時，節點數（或節點間距 Δs ）及時間梯度（間隔） Δt 是影響結果之穩定性之主要因素。若以拉氏法（Lagrangian Method）來描繪波浪之進行時，往昔學者常以（ $\Delta s / \Delta t < C$ ）為控制準則〔Longuet-Higgin and Cokelet, 1976〕，而可得良好結果。本文因應用Green定理對有限領域內自由水面波形進行數值運算，另以一固定 Δt 而 Δs 改變。二固定 Δs 而 Δt 作變化，分別探討研究之。結果顯示，當 Δt 固定時， Δs 愈小（即節點數設定愈多），結果會更趨平滑良好，當 Δs 固定時， Δt 變小，會使水面變化更趨穩定，可以減少平滑化自由水面之次數，但若欲求出全週期波形變化時，CPU時間都會增加。表一：節點數與CPU時間之關係。其微小振幅CPU時間比為1:1.44:2.04而有限振幅時間比為1:1.38:1.77。

在數值計算過程中，通常會有不穩定的盪漾現象（fluctuation）發生，而吾人無法預測何時會有不穩定現象發生，故於每一 Δt 時刻後即作一次平滑化自由水面之控制，經此步驟之處理後，不穩定的節點跳動會趨向規律平滑。本文於所求水面領域上設置40節點， $\Delta t = T/36$ （ T ：週期），以進行數值計算，可順利地求得水面波形變化且結果穩定良好。

五、結 論

利用本法可簡單地求出未碎波前微小振幅波之波形及邇上高度，並可藉而求出，加入考慮自由水面非線性項條件後，歷經 $n\Delta t$ 時之非線性水面波形變化情況。依據本文之研究可得到下列結論：(1)應用微小振幅理論所求出之波形對靜止水位線呈完全對稱，且其相對邇上（ R/H ）值為1。（對直立壁而言）(2)同一坡度，在相同入射波浪條件下，有限振幅波波形及邇上值都比微小振幅波大。(3)應用有限振幅波理論所得之自由水面波形變化較趨近於實際之波浪情況。(4)同一坡度，固定周期 T ，以不同入射波高作用後，其邇上值隨入射波高之大小呈線性增減。(5)同一波浪條件作用下，斜坡面為 30° 時，所得之邇上高度為最大，故在工程設計時，應盡量避免選用 30° 左右之坡面。(6)依本法，若使用之 $\Delta s, \Delta t$ 值愈小，可得更穩定、平滑之水面波形變化。(7)本法適用於求取複雜海底地形時之波形變化。

六、參考文獻

- 1 Carrier G.F. and Greenspan H.P., "Water Waves of Finite Amplitude on a Sloping Beach", J. Fluid Mech. Vol 4, pp.97-109, 1958.
- 2 Chan K.C. and Street L., "A Computer Study of Finite-Amplitude Water Waves", Journal of Computational Physics 6, pp.68-94, 1970.
- 3 Longuet-Higgins M.S. and Cokelet E.D., "The Deformation of Steep Surface Waves on Water I. A Numerical Method of Computation", Proc. R. Soc. Lond: A.350, pp.1-26, 1976.
- 4 Nobuo Shuto, "Run-up of Long Waves on A Sloping Beach", Coastal Engineering in Japan, 10, 1967, pp.23-38.
- 5 Nobuo Shuto, "Standing Waves in Front of A Sloping Dike", Coastal Engineering in Japan, Vol 15, pp.13-23, 1972.
- 6 Saville, T. "Wave Run-up on Shore Structure" ASCE, NO. WW2, Vol 82, pp.925:1-925:4, 1957.
- 7 合田良實、柿崎秀作, "有限振幅波ならびにその波壓に關する研究", 日本港灣技術研究所報告, 第5卷10號, 1966.6。
- 8 周宗仁, 邊界元素法在波浪力學之應用, 台灣海洋學院河海工程學會, 1983。
- 9 周宗仁、韓文育, 「波浪遡上之研究」, 河海研究第11號, 國立台灣海洋學院河海工程學系, 1982。
- 10 劉立方, 流體力學講習會講義, 台北, ch.3, 1983。

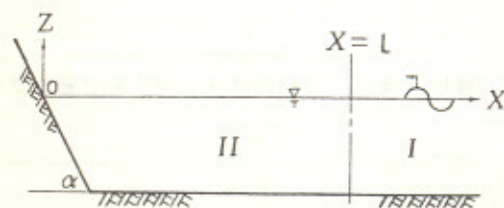


圖1 領域示意圖

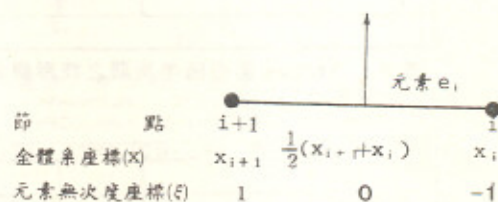


圖2 線性元素之無次元座標

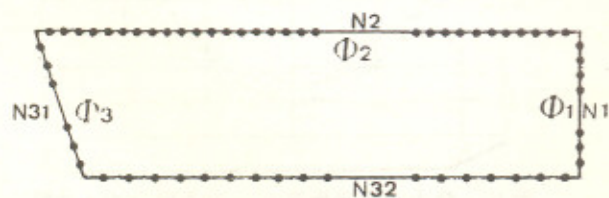


圖3 數值計算節點分佈圖

圖形符號說明

SHG : $\sigma^2 h / g$ KH : kh

ALPHA : 斜坡角

EATO : 入射振幅

KA : 波度

DT : 微小時間間隔

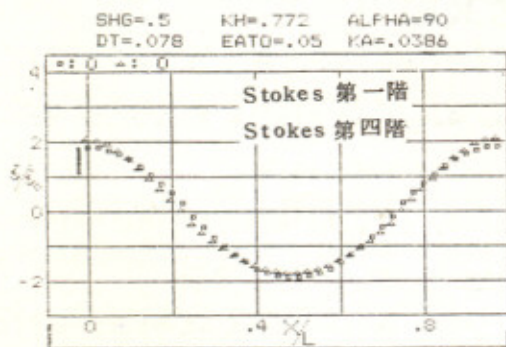


圖 4 Stokes 第一階及第四階之最大波形比較

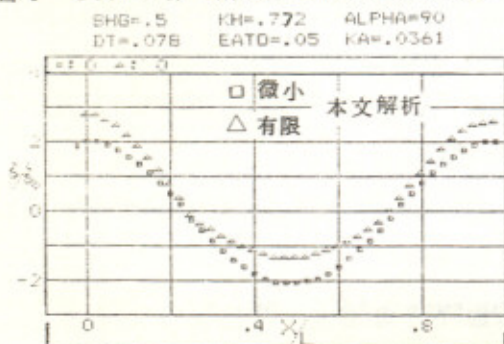


圖 5 微小、有限振幅之最大波形比較

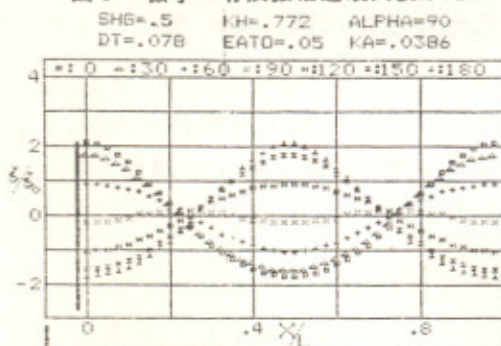


圖 6 Stokes 第四階半周期之波形變化

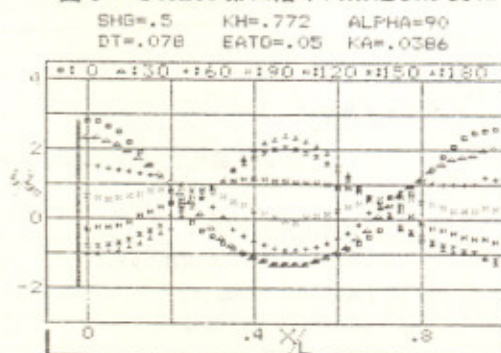


圖 7 有限振幅半周期之波形變化

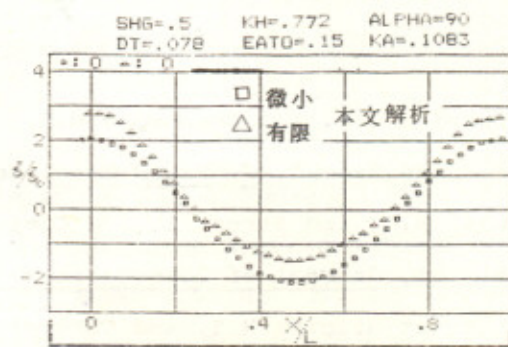


圖 8 微小、有限振幅 $\alpha = 90^\circ$ 時之週上比較

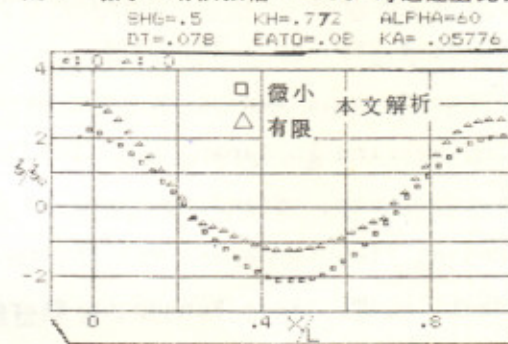


圖 9 微小、有限振幅 $\alpha = 60^\circ$ 時之週上比較

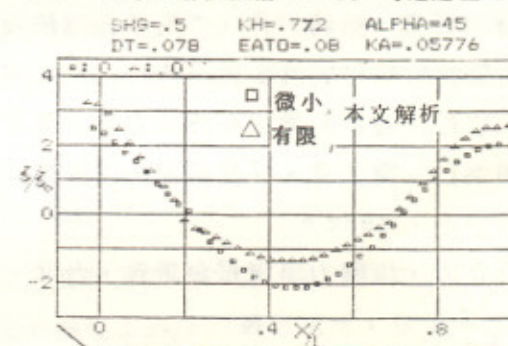


圖 10 微小、有限振幅 $\alpha = 45^\circ$ 時之週上比較

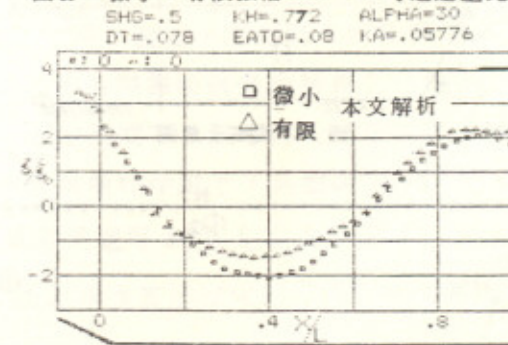


圖 11 微小、有限振幅 $\alpha = 30^\circ$ 時之週上比較

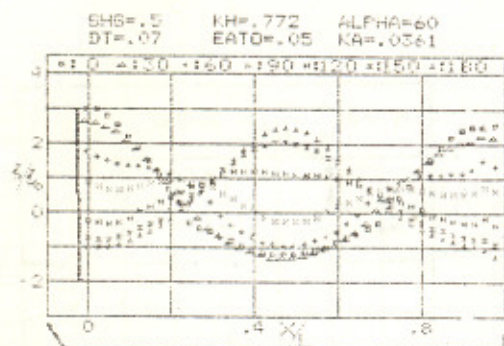


圖 12 $\alpha = 60^\circ$ 時之有限振幅波形變化

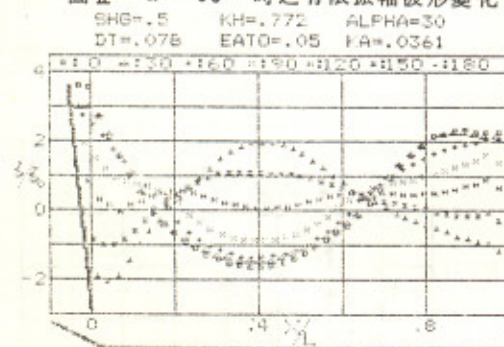


圖 13 $\alpha = 30^\circ$ 時之有限振幅波形變化

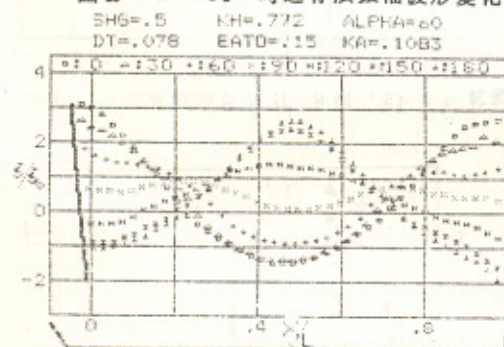


圖 14 $\alpha = 60^\circ$ 時之有限振幅波形變化

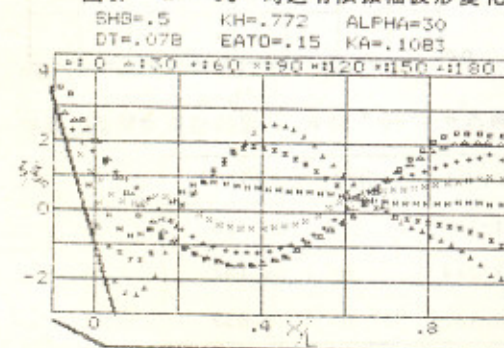


圖 15 $\alpha = 30^\circ$ 時之有限振幅波形變化

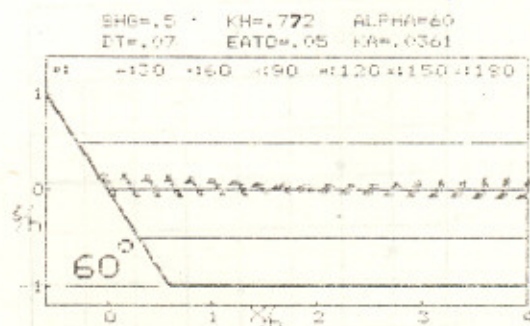


圖 16 $\alpha = 60^\circ$ 時半周期之波形變化(有限)

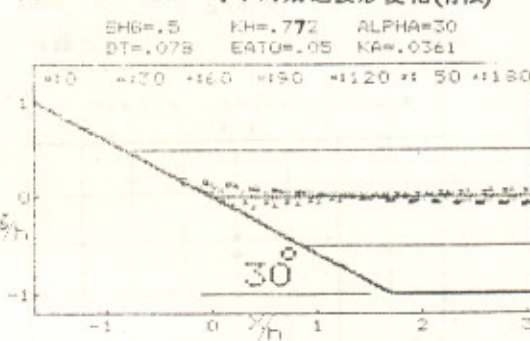


圖 17 $\alpha = 30^\circ$ 時半周期之波形變化(有限)

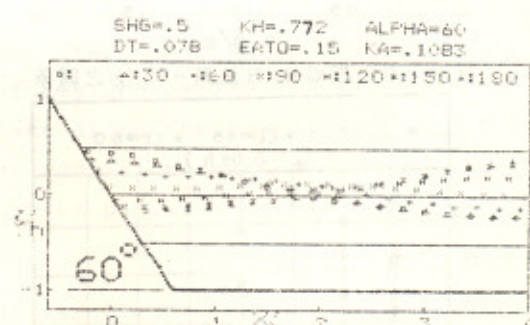


圖 18 $\alpha = 60^\circ$ 時半周期之波形變化(有限)

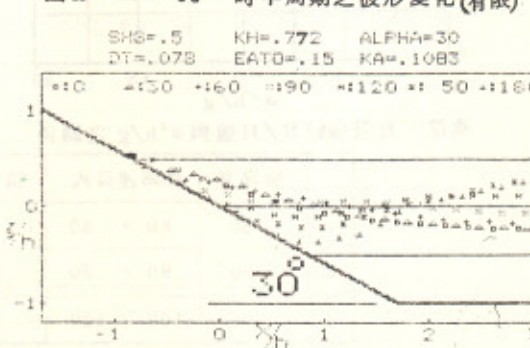


圖 19 $\alpha = 30^\circ$ 時半周期之波形變化(有限)

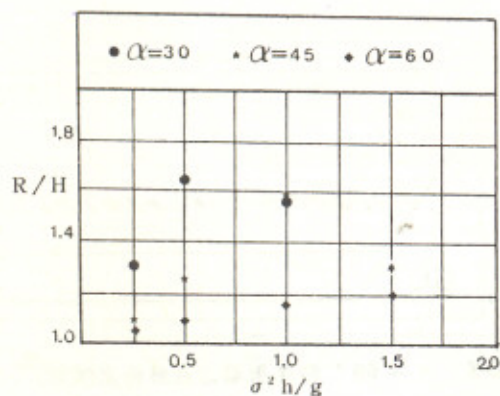


圖20 微小振幅 R/H 值與 $\sigma^2 h/g$ 之關係

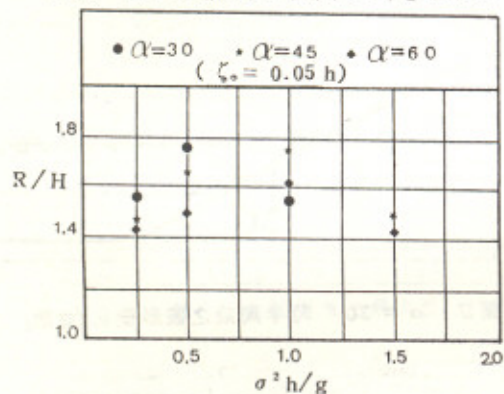


圖21 有限振幅 R/H 值與 $\sigma^2 h/g$ 之關係

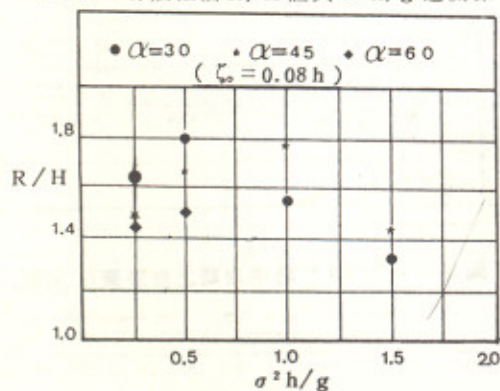


圖22 有限振幅 R/H 值與 $\sigma^2 h/g$ 之關係

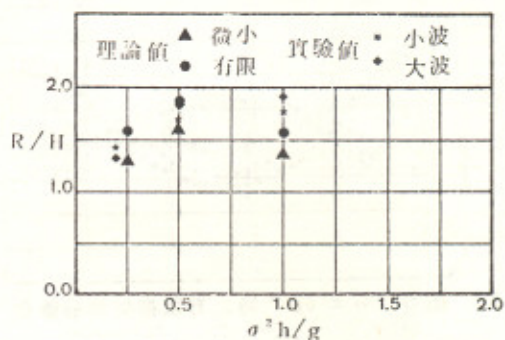


圖23 $\alpha = 30^\circ$ 時 R/H 理論值與實驗值之比較

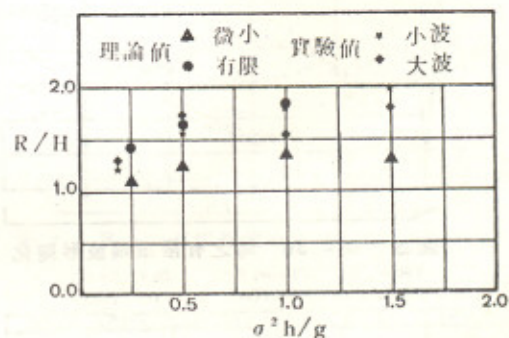


圖24 $\alpha = 45^\circ$ 時 R/H 理論值與實驗值之比較

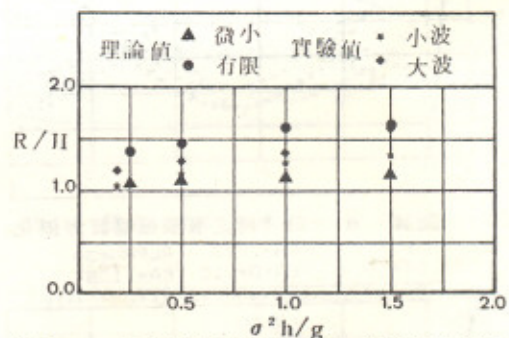


圖25 $\alpha = 60^\circ$ 時 R/H 理論值與實驗值之比較

	節點數	矩陣運算式	微小振幅 CPU/ Δt	有限振幅 CPU/ Δt
1	80	80 × 80	04 : 24.560	03 : 00.278
2	90	90 × 90	06 : 23.244	04 : 08.102
3	100	100 × 100	09 : 00.435	05 : 19.635

表一 節點數與 CPU 時間之關係

Run up of Nonlinear Water Waves

Chung-Ren CHOU* Der-Rong Ferng**

Abstract

Herein we propose a numerical method of computation for determining the time-dependent wave profile of nonlinear water waves, which just in the vicinity of a smoothing vertical quay or sloping beach in a constant water depth. Firstly based on linear water waves theory, and with the application of Green's theorem, we can solve the linear water waves, so the relative run-up height we can get it also. Now, we can take them, the results from linear theory, as a initial values, as one takes account of the nonlinear terms on the free water surface boundary conditions and expresses them into finite difference forms simultaneously. In the mean time, we also select a valid artificial boundary to satisfy the far-field radiation condition. So far, it is with no difficulty to solve the new free water surface of the next small time step, as long as we substitute the initial values into the difference forms and employ the Green's theorem again to compute the water surface along the boundary. Now the free water surface solved with nonlinear conditions called nonlinear free water surface. A time-histories water waves profiles we can get, if do the proceeding procedure repeatly.

For the aim to specify the availability of this method, the water surface profiles for the case of the smoothing vertical quay were compared with the results that obtained from the theories of The Stokes first order and fourth order, and good agreement makes.

* Professor. Department of Harbor & River Engineering, National Taiwan College of Marine Science & Technology

** Teaching Assistant, Department of Harbor & River Engineering, National Taiwan College of Marine Science & Technology