

潛水繫留水平板引起波之變化及 水中繫留水平板之運動特性

周宗仁* 翁文凱** 井島武士***

摘 要

本研究首先依照微小振幅波理論以邊界元素法求出波通過潛水繫留水平板後，水平板在定常狀態下的運動振幅及繫留索受力情形，而後並計算水平板自由運動的運動振幅。

本文除探討水平板沒水深度對通過波及水平板運動振幅的影響外，繫留索的彈性係數及繫留角對水平板運動振幅的影響亦在本文中有所探討。

一、前 言

如何減少波浪作用於防波堤、護岸等海岸結構物的壓力及如何使結構物達到最佳消波效果為海岸工程主要課題之一。至目前為止，欲達此兩目的，大部份的趨勢均著眼於如何減少波高，然而影響波浪特性的因素除波高外尚有波長，因此本文針對將水平板在水中以繫留方式繫留時，因波浪通過水平板時會因水深變淺而產生波長較短之波，此波長較短之波在通過水平板後，會與原來的波重疊，使波浪在通過水平板後，波長變短，如此亦可達到消波或減壓的效果。

本文係在微小振幅波理論範圍內，利用邊界元素法作數值解析，求出水平板被繫留，以及進行自由浮體運動時，所引起之波浪變形及水平板運動時的振幅，以了解水平板的消波效果。

二、理論分析

如圖1所示，在一定水深 h 的海域中有長 $2l$ ，厚度 d 之水平板被繫於水中，在其下端 B 、 D 兩點對稱繫有彈性係數為 K_0 之繫留索。在靜止時，此兩點與重心 $G(0, \bar{z}_0)$ 之垂距為 d_0 ，與水底之垂距為 h_0 ，而分別被固定於海底 A 、 C 處， AB 及 CD 間之水平距離各為 l_0 ，若水平板為剛體，運動後重心變為 $G'(x_0, z_0)$ 。座標軸之原點位於靜水面上 O 點處，而向上為 z 軸，水平向右為 x 軸，水平板重心位於靜水面下 qh 處（水平板密度呈均勻分佈以 ρ' 表示）。

* 國立海洋學院河海系教授

** 國立海洋學院河海系助教

*** 日本九州大學名譽教授

在距離水平板極遠 $x = l_1, -l_2$ 處設立兩假想邊界面，而將流體領域分為(I)、(II)及(III)三領域，並假設海底及水平板均為不透水。若各流體領域均為非壓縮性、非黏性且非旋轉之理想流體所充滿，

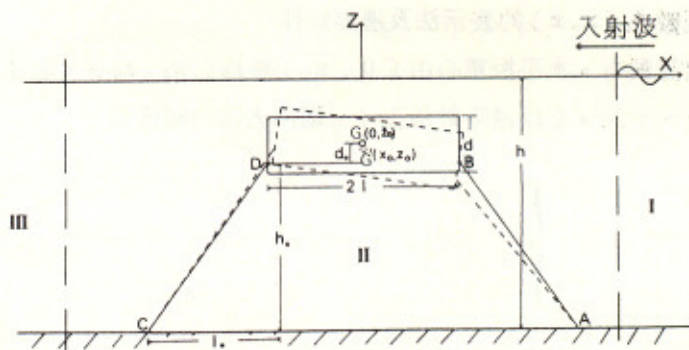


圖1 繫留水平板

則其運動持有速度勢 $\Phi(x, z; t)$ ，當領域(I)有一振幅為 ζ_0 ，週頻率等於 $\sigma (= 2\pi/T, T$ 為波之週期) 之正弦波入射時，各領域之速度勢 $\Phi(x, z; t)$ 均可以 $\Phi(x, z; t) = g\zeta_0 / \sigma \cdot \phi(x, z) \cdot \exp(i\sigma t)$ 的形式表示之。

2.1 領域(I), (II)之勢函數表示法：

設假想邊界面 ($x = l_1, -l_2$) 離水平板甚遠，而假設(I), (III)領域之運動不受因水平板存在而引起的散射波影響，其速度勢可表示如下。

領域(I)的勢函數 $\varphi_1(x, z)$ 可以下式表示

$$\varphi_1(x, z) = [e^{ik(x-l_1)} + \phi_1 e^{-ik(x-l_1)}] \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \dots\dots\dots (2.1)$$

在假想邊界面 ($x = l_1$) 上勢函數及其向 x 之正方向導函數值可表示為

$$\varphi_1(l_1, z) = (1 + \phi_1) \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \dots\dots\dots (2.2)$$

$$\bar{\varphi}_1(l_1, z) = ik(1 - \phi_1) \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \dots\dots\dots (2.3)$$

其中 ϕ_1 為複數反射率， k 為 $\sigma^2 h / g = kh \tanh kh$ 之根

領域(III)的勢函數 $\varphi_3(x, z)$ 為

$$\varphi_3(x, z) = \phi_2 e^{ik(x+l_2)} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \dots\dots\dots (2.4)$$

其中 ϕ_2 表示複數透過率

在假想邊界面 ($x = -l_2$) 上之勢函數及其向 x 負方向導函數為

$$\varphi_3(-l_2, z) = \phi_2 \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \dots\dots\dots (2.5)$$

$$\bar{\varphi}_2(-\ell_2, z) = -ik\phi_2 \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \dots\dots\dots (2.6)$$

2.2 領域(II)勢函數 $\phi_2(x, z)$ 的表示法及邊界條件

當水平板呈定常運動時，水平板重心由 $(0, \bar{z}_0)$ 移為 (x_0, z_0) ，若水平板運動的水平、垂直和回轉角振幅為 ξ 、 η 及 ω (以逆時針為正)，則兩者間的關係為

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \xi e^{i\sigma t} \\ z_0 &= \bar{z}_0 + \eta e^{i\sigma t} \\ \delta &= \omega e^{i\sigma t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.7)$$

在微小振幅波作用下，平板上下左右各面的方程式為

$$\left. \begin{aligned} z &= (-qh \pm d/2) + (\eta + \omega x) e^{i\sigma t}, \quad z = -qh \pm d/2 \\ x &= \pm \ell + [\xi - \omega(z - \bar{z}_0)] e^{i\sigma t}, \quad x = \pm \ell \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.8)$$

而邊界條件分別如下。

(i) 控制方程式

在各體領域內，勢函數 $\phi(x, z)$ 應為下列滿足 Laplace 方程式之函數

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \dots\dots\dots (2.9)$$

(ii) 自由水面條件

在靜水面上，由於動力學、運動學及大氣壓力一定的條件得

$$\bar{\phi} = \sigma^2 / g \cdot \phi, \quad z = 0 \dots\dots\dots (2.10)$$

(iii) 在海底面上，因假設海底為固定不透水，得

$$\partial \phi / \partial \nu = 0, \quad z = -h \dots\dots\dots (2.11)$$

(iv) 水平板上之運動邊界條件

進行微小運動時，水平板各面的運動邊界條件為

$$\left. \begin{aligned} g\zeta_0 / \sigma \cdot \partial \phi / \partial x &= i\sigma [\xi - \omega(z - \bar{z}_0)], \quad x = \pm \ell \\ g\zeta_0 / \sigma \cdot \partial \phi / \partial z &= i\sigma(\eta + \omega x), \quad z = -qh \pm d/2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.12)$$

2.3 繫留水平板之運動方程式

繫留水平板的位移、回轉角及對繫留索之反力等隨繫留索的性質而異，本文只考慮呈緊張狀態的索張力，並忽略索運動對慣性質量和流體抵抗的影響；若水平板質量為 M ，慣性矩為 I ，則

$$\left. \begin{aligned} M &= \rho' \times 2\ell \times d \\ I &= \frac{2}{3} \times \rho' \times d \times \ell^3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.13)$$

水平板繫於水中，上下左右面所受流體壓力各以 $P_{53}, P_{51}, P_{52}, P_{54}$ 表示，而產生單位水平、垂直位移及回轉角時所對應之水平、垂直方向的反力及力矩各以 $K_{xx}, K_{xz}, K_{\theta x}; K_{xz}, K_{zz}, K_{\theta z}; K_{x\theta}, K_{z\theta}, K_{\theta\theta}$ 表示，在對稱之索繫留時，水平板運動方程式可以下式表示。

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2 X_0}{dt^2} &= \int_{-qh-d/2}^{-qh+d/2} (P_{52} - P_{54}) dz - 2K_{xx} X_0 - 2K_{x\theta} \delta \\ M \frac{d^2 z_0}{dt^2} &= \int_{-\ell}^{\ell} (P_{51} - P_{53}) dx - Mg - 2K_{zz} (z_0 - \bar{z}_0) \\ I \frac{d^2 \delta}{dt^2} &= \int_{-qh-d/2}^{-qh+d/2} (P_{52} - P_{54}) (z - \bar{z}_0) dz + \int_{-\ell}^{\ell} (P_{51} - P_{53}) x dx \\ &\quad - 2K_{\theta x} X_0 - 2K_{\theta\theta} \delta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.14)$$

$K_{xx}, K_{x\theta}, \dots\dots$ 等值與彈性係數 K_0 (單位伸長量所生之力) 之關係依井島⁽¹⁾ 之表示則為

$$\left. \begin{aligned} K_{xx} &= \frac{1}{1 + (h_0/\ell_0)^2} \cdot K_0 \\ K_{xz} &= \frac{(h_0/\ell_0)^2}{1 + (h_0/\ell_0)^2} \cdot K_0 \\ K_{\theta x} = K_{x\theta} &= \frac{d_0/\ell - h_0/\ell_0}{1 + (h_0/\ell_0)^2} \cdot K_0 \cdot \ell \\ K_{\theta\theta} &= \frac{(d_0/\ell - h_0/\ell_0)^2}{1 + (h_0/\ell_0)^2} \cdot K_0 \cdot \ell^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.15)$$

又流體壓力 P 與速度勢 Φ 間之關係式如下。

$$P = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \rho g z \dots\dots\dots (2.16)$$

但 ρ 為流體密度， g 為重力加速度

2.4 Green 函數

設 $\phi(x, z)$ 在第(II)領域中可滿足 Laplace 方程式，且若其二次導函數存在，則根據 Green 定理 (Green's Second Identity Law)：領域內點的勢函數 $\phi(x, z)$ 可由邊界上之函數值 $\phi(\xi, \eta)$ 及其對邊界法線方向之微分值 $\partial \phi(\xi, \eta) / \partial \nu$ 來決定，即內部點之勢函數可以下式表示之 (周⁽²⁾)。

$$\phi(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial \phi(\xi, \eta)}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} - \phi(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right] ds \quad \dots\dots\dots (2.17)$$

而邊界上面的點 (ξ', η') 的勢函數可以下式表之

$$\phi(\xi', \eta') = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial \phi(\xi, \eta)}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} - \phi(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right] ds \quad \dots\dots\dots (2.18)$$

在(2.17)式及(2.18)式中 $\ln \frac{1}{r}$ 為滿足 Laplace 方程式之特別解。

2.5 積分方程式之分離化

將領域 \mathbb{D} 封閉曲線以線性元素將外圍以逆時針方向，內圍（水平板）以順時針方向全部以 N 個節點加以分割，每個元素以線性元素作為分離化元素，則元素內的物理量呈線性變化的特性，並將全體系座標無次度座標化，由周²⁾ 可將(2.18)式以下列和分方程式表示。

$$\begin{aligned} \phi_i(\xi, \eta) + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} [\phi_j(\xi, \eta) \cdot M_1 + \bar{\phi}_{j+1}(\xi, \eta) \cdot M_2] \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} ds \\ = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} [\bar{\phi}_j(\xi, \eta) \cdot M_1 + \bar{\phi}_{j+1}(\xi, \eta) \cdot M_2] \ln \frac{1}{r} ds \quad \dots\dots\dots (2.19) \end{aligned}$$

又可以將上式以矩陣形式表示如下。(2),(3)

$$[\phi] = [0] [\bar{\phi}] \quad \dots\dots\dots (2.20)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_{11} & O_{12} & O_{13} & O_{14} & O_{15} \\ O_{21} & O_{22} & O_{23} & O_{24} & O_{25} \\ O_{31} & O_{32} & O_{33} & O_{34} & O_{35} \\ O_{41} & O_{42} & O_{43} & O_{44} & O_{45} \\ O_{51} & O_{52} & O_{53} & O_{54} & O_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \bar{\phi}_2 \\ \bar{\phi}_3 \\ \bar{\phi}_4 \\ \bar{\phi}_5 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (2.21)$$

由於(2.11)式之條件(2.21)式可改為

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_{11} & O_{12} & O_{13} & O_{15} \\ O_{21} & O_{22} & O_{23} & O_{25} \\ O_{31} & O_{32} & O_{33} & O_{35} \\ O_{51} & O_{52} & O_{53} & O_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \bar{\phi}_2 \\ \bar{\phi}_3 \\ \bar{\phi}_5 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (2.22)$$

2.6 假想邊界面 ($x = l_1, -l_2$) 之力學邊界條件與反射率、透過率

由於領域(I)、(II)、(III)之流體運動所引起之能量流束 (energy flux) 及質量流束 (mass flux) 必須連續，故得

$$\phi (l_1, z) = \varphi_1 (l_1, z) \quad \dots\dots\dots (2.23)$$

$$\bar{\phi} (l_1, z) = \bar{\varphi}_1 (l_1, z) \quad \dots\dots\dots (2.24)$$

$$\phi (-l_2, z) = \varphi_3 (-l_2, z) \quad \dots\dots\dots (2.25)$$

$$\bar{\phi} (-l_2, z) = \bar{\varphi}_3 (-l_2, z) \quad \dots\dots\dots (2.26)$$

(i) 反射率

將式(2.3)代入(2.24)式，兩邊各乘 $\cosh k(h+z)$ ，再由 $z = -h \sim 0$ 積分得反射率 ϕ_1 為

$$\phi_1 = 1 + \frac{i}{N_0 \sinh kh} \int_{-h}^0 \bar{\phi} \cosh k(h+z) dz \quad \dots\dots\dots (2.27)$$

$$N_0 = \frac{1}{2} (1 + 2kh / \sinh 2kh)$$

(ii) 透過率

將(2.6)式代入(2.26)式，兩邊各乘 $\cosh k(h+z)$ ，再由 $z = -h \sim 0$ 積分得透過率 ϕ_2 為

$$\phi_2 = \frac{i}{N_0 \sinh kh} \int_{-h}^0 \bar{\phi} \cosh k(h+z) dz \quad \dots\dots\dots (2.28)$$

2.7 水平板運動與繫留索拉力

(i) 水平板的運動振幅

將(2.7)，(2.16)式代入(2.14)式，解其聯立方程式得水平板的水平、垂直振幅和回轉角 ξ 、 η 、 ω 表示如下。

$$\eta / \zeta_0 = \frac{\rho ig}{(M\sigma^2 - 2K_{zz})} \int_{-\ell}^{\ell} (\phi_{51} - \phi_{53}) dz \quad \dots\dots\dots (2.29)$$

$$\begin{aligned} \xi / \zeta_0 = & \frac{\rho ig}{[(M\sigma^2 - 2K_{xx})(\frac{1}{3}M\ell^2\sigma^2 - 2K_{\theta\theta}) - 4K_{\theta x}K_{x\theta}]} \\ & \cdot \{ -(\frac{1}{3}M\ell^2\sigma^2 - 2K_{\theta\theta}) \int_{-qh-d/2}^{-qh+d/2} (\phi_{54} - \phi_{52}) dz \\ & + 2K_{\theta x} [\int_{-qh-d/2}^{-qh+d/2} (\phi_{54} - \phi_{52})(z - \bar{z}_0) dz + \int_{-\ell}^{\ell} (\phi_{51} - \phi_{53}) x dx] \} \quad \dots\dots (2.30) \end{aligned}$$

$$\omega/\zeta_0 = \frac{\rho i g}{[(M\sigma^2 - 2K_{xx})(\frac{1}{3}M\ell^2\sigma^2 - 2K_{\theta\theta}) - 4K_{\theta x}K_{x\theta}]} \left\{ -2K_{\theta x} \int_{-qh-d/2}^{-qh+d/2} (\phi_{54} - \phi_{52}) dz + (M\sigma^2 - 2K_{xx}) \cdot \left[\int_{-qh-d/2}^{-qh+d/2} (\phi_{54} - \phi_{52})(z - \bar{z}_0) dz + \int_{-\ell}^{\ell} (\phi_{51} - \phi_{53}) x dx \right] \right\} \dots\dots\dots (2.31)$$

將(2.29), (2.30), (2.31)式代入(2.12)式得水平板上下左右各面上勢函數之導函數值如下。

$$\begin{aligned} \partial\phi/\partial x = & A_0 \int_{-qh-d/2}^{-qh+d/2} (\phi_{54} - \phi_{52}) dz - B_0 \int_{-qh-d/2}^{-qh+d/2} (\phi_{54} - \phi_{52})(z - \bar{z}_0) dz \\ & - B_0 \int_{-\ell}^{\ell} (\phi_{51} - \phi_{53}) x dx - B_0 (z - \bar{z}_0) \int_{-qh-d/2}^{-qh+d/2} (\phi_{54} - \phi_{52}) dz \\ & + C_0 (z - \bar{z}_0) \int_{-qh-d/2}^{-qh+d/2} (\phi_{54} - \phi_{52})(z - \bar{z}_0) dz \\ & + C_0 (z - \bar{z}_0) \int_{-\ell}^{\ell} (\phi_{51} - \phi_{53}) x dx \dots\dots\dots (2.32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial\phi/\partial z = & -D_0 \int_{-\ell}^{\ell} (\phi_{51} - \phi_{53}) dx + B_0 x \int_{-qh-d/2}^{-qh+d/2} (\phi_{54} - \phi_{52}) dz \\ & - C_0 x \int_{-qh-d/2}^{-qh+d/2} (\phi_{54} - \phi_{52})(z - \bar{z}_0) dz - C_0 x \int_{-\ell}^{\ell} (\phi_{51} - \phi_{53}) x dx \dots\dots\dots (2.33) \end{aligned}$$

其中

$$A_0 = \frac{\rho\sigma^2 (\frac{1}{3}M\sigma^2\ell^2 - 2K_{\theta\theta})}{[(M\sigma^2 - 2K_{xx})(\frac{1}{3}M\ell^2\sigma^2 - 2K_{\theta\theta}) - 4K_{\theta x}K_{x\theta}]}$$

$$B_0 = \frac{2\rho\sigma^2 K_{x\theta}}{[(M\sigma^2 - 2K_{xx})(\frac{1}{3}M\ell^2\sigma^2 - 2K_{\theta\theta}) - 4K_{\theta x}K_{x\theta}]}$$

$$C_0 = \frac{\rho\sigma^2 (M\sigma^2 - 2K_{xx})}{[(M\sigma^2 - 2K_{xx})(\frac{1}{3}M\ell^2\sigma^2 - 2K_{\theta\theta}) - 4K_{\theta x}K_{x\theta}]}$$

$$D_0 = \frac{\rho\sigma^2}{(M\sigma^2 - 2K_{xx})}$$

$\phi_{51}, \phi_{52}, \phi_{53}, \phi_{54}; \bar{\phi}_{51}, \bar{\phi}_{52}, \bar{\phi}_{53}, \bar{\phi}_{54}$ 各為水平板下、左、上、右側面上之勢函數及其導函數值。

若將水平板的表面分別以 N_{51} 、 N_{52} 、 N_{53} 及 N_{54} 個節點加以分離化後，可以下式矩陣形式表示。

$$[\bar{\phi}_5] = [P][\phi_5] \dots\dots\dots (2.34)$$

但

$$[\bar{\phi}_5] = [\bar{\phi}_{51}, \bar{\phi}_{52}, \bar{\phi}_{53}, \bar{\phi}_{54}]^T \dots\dots\dots (2.35)$$

$$[\phi_5] = [\phi_{51}, \phi_{52}, \phi_{53}, \phi_{54}]^T \dots\dots\dots (2.36)$$

$$[P] = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2.37)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} [P_{11}] &= D_0 \cdot \sum_{j=1}^{N_{51}} \Delta x_j + C_0 X_i \cdot \sum_{j=1}^{N_{51}} x_j \cdot \Delta x_j \\ [P_{12}] &= (B_0 - C_0) \cdot X_i \cdot \left[\sum_{j=1}^{N_{52}} \Delta z_j - \sum_{j=1}^{N_{52}} (z_j - \bar{z}_0) \cdot \Delta z_j \right] \\ [P_{13}] &= -(D_0 \cdot \sum_{j=1}^{N_{53}} \Delta x_j + C_0 X_i \cdot \sum_{j=1}^{N_{53}} x_j \cdot \Delta x_j) \\ [P_{14}] &= -(B_0 - C_0) \cdot X_i \cdot \left[\sum_{j=1}^{N_{54}} \Delta z_j - \sum_{j=1}^{N_{54}} (z_j - \bar{z}_0) \cdot \Delta z_j \right] \end{aligned} \right\} i = 1 \sim N_{51}$$

$$\left. \begin{aligned} [P_{21}] &= [B_0 - C_0 (Z_i - \bar{Z}_0)] \cdot \sum_{j=1}^{N_{51}} x_j \cdot \Delta x_j \\ [P_{22}] &= [A_0 - B_0 (Z_i - \bar{Z}_0)] \cdot \sum_{j=1}^{N_{52}} \Delta z_j + [C_0 (Z_i - \bar{Z}_0) - B_0] \cdot \sum_{j=1}^{N_{52}} (z_j - \bar{z}_0) \cdot \Delta z_j \\ [P_{23}] &= -[B_0 - C_0 (Z_i - \bar{Z}_0)] \cdot \sum_{j=1}^{N_{53}} x_j \cdot \Delta x_j \\ [P_{24}] &= -[A_0 - B_0 (Z_i - \bar{Z}_0)] \cdot \sum_{j=1}^{N_{54}} \Delta z_j - [C_0 (Z_i - \bar{Z}_0) - B_0] \cdot \sum_{j=1}^{N_{54}} (z_j - \bar{z}_0) \cdot \Delta z_j \end{aligned} \right\} i = 1 \sim N_{52}$$

$$\left. \begin{aligned} [P_{31}] &= -(D_0 \cdot \sum_{j=1}^{N_{51}} \Delta x_j + C_0 X_i \cdot \sum_{j=1}^{N_{51}} x_j \cdot \Delta x_j) \\ [P_{32}] &= -(B_0 - C_0) \cdot X_i \cdot \left[\sum_{j=1}^{N_{52}} \Delta z_j - \sum_{j=1}^{N_{52}} (z_j - \bar{z}_0) \cdot \Delta z_j \right] \\ [P_{33}] &= D_0 \cdot \sum_{j=1}^{N_{53}} \Delta x_j + C_0 X_i \cdot \sum_{j=1}^{N_{53}} x_j \cdot \Delta x_j \\ [P_{34}] &= (B_0 - C_0) \cdot X_i \cdot \left[\sum_{j=1}^{N_{54}} \Delta z_j - \sum_{j=1}^{N_{54}} (z_j - \bar{z}_0) \cdot \Delta z_j \right] \end{aligned} \right\} i = 1 \sim N_{53}$$

$$\left. \begin{aligned}
 [P_{41}] &= -[B_0 - C_0(Z_1 - \bar{Z}_0)] \cdot \sum_{j=1}^{N_{51}} x_j \cdot \Delta x_j \\
 [P_{42}] &= -[A_0 - B_0(Z_1 - \bar{Z}_0)] \cdot \sum_{j=1}^{N_{52}} \Delta z_j - [C_0(Z_1 - \bar{Z}_0) - B_0] \cdot \sum_{j=1}^{N_{52}} (z_j - \bar{z}_0) \cdot \Delta z_j \\
 [P_{43}] &= [B_0 - C_0(Z_1 - \bar{Z}_0)] \sum_{j=1}^{N_{53}} x_j \cdot \Delta x_j \\
 [P_{44}] &= [A_0 - B_0(Z_1 - \bar{Z}_0)] \cdot \sum_{j=1}^{N_{54}} \Delta z_j + [C_0(Z_1 - \bar{Z}_0) - B_0] \cdot \sum_{j=1}^{N_{54}} (z_j - \bar{z}_0) \cdot \Delta z_j
 \end{aligned} \right\} i = 1 \sim N_{54}$$

(ii) 水平板上繫留索的拉力

水平板上繫留點B運動後對靜止時位置的位移設為 x'_0 及 z'_0 ，則

$$\frac{x'_0}{\zeta_0} = \frac{x_0}{\zeta_0} + \frac{d_0}{\ell} \cdot \frac{\delta \ell}{\zeta_0} \dots\dots\dots (2.38)$$

$$\frac{z'_0}{\zeta_0} = \frac{z_0 - \bar{z}_0}{\zeta_0} + \frac{\delta \ell}{\zeta_0} \dots\dots\dots (2.39)$$

浮體運動時繫留索所生之力為

$$F/\zeta_0 K_0 = \left\{ \frac{x'_0}{\zeta_0} - \frac{h_0}{\ell_0} \cdot \frac{z'_0}{\zeta_0} \right\} / \sqrt{1 + (h_0/\ell_0)^2} \dots\dots\dots (2.40)$$

2.8 微小振幅波速度勢之解析

將(2.27)式代入(2.2)，(2.23)式得邊界上($x = \ell_1$)各節點之勢函數為

$$\phi_1(P) = 2 \frac{\cosh k(h+z_p)}{\cosh kh} + \sum_{r=1}^{N_1} \bar{\phi}_1(r) f_1(r, p) \cdot \Delta z_p \dots\dots\dots (2.41)$$

其中 $f_1(r, p) = i \frac{\cosh k(z_p+h) \cosh k(z_r+h)}{N_0 \sinh kh \cosh kh}$

同理將(2.28)式代入(2.5)及(2.25)式得邊界($x = -\ell_2$)上各點之速度勢

$$\phi_3(q) = \sum_{r=1}^{N_2} f_2(r, q) \bar{\phi}_3(r) \cdot \Delta z_q \dots\dots\dots (2.42)$$

其中 $f_2(r, q) = i \frac{\cosh k(z_q+h) \cosh k(z_r+h)}{N_0 \sinh kh \cosh kh}$

將(2.41)式及(2.42)式矩陣化後得

$$\{\phi_1\} = \{z\} + \{F\} \{\bar{\phi}_1\} \dots\dots\dots (2.43)$$

$$\{\phi_3\} = \{R\} \{\bar{\phi}_3\} \dots\dots\dots (2.44)$$

其中 $\{ F \} = f_1 (i , j) \cdot \Delta z_j$ $(i ; j = 1 \sim N_1)$

$\{ R \} = f_2 (i , j) \cdot \Delta z_j$ $(i ; j = 1 \sim N_3)$

$\{ z \} = 2 \frac{\cosh k(z_p + h)}{\cosh kh}$

又若設第一假想邊界面上有 N_1 個節點，自由水面設定 N_2 個節點，第二假想邊界面上 ($x = -\ell_2$) 設定 N_3 個節點，海底不透水面設 N_4 個節點，而水平板上設為 N_5 ($= N_{51} + N_{52} + N_{53} + N_{54}$) 個節點，則上式可以下式形式表示，而腳註之數字表示各邊界面，如 ϕ_1 表示在第一假想邊界面上之勢函數值，其餘類推。

將 (2 . 10) , (2 . 36) , (2 . 43) , (2 . 44) 式代入 (2 . 22) 式並整理得

$$\begin{bmatrix} O_{11} - F & O_{12} \cdot \frac{\sigma^2}{g} & O_{13} & O'_{15} \\ O_{21} & O_{22} \cdot \frac{\sigma^2}{g} - I & O_{23} & O'_{25} \\ O_{31} & O_{32} \cdot \frac{\sigma^2}{g} & O_{33} - R & O'_{35} \\ O_{51} & O_{52} \cdot \frac{\sigma^2}{g} & O_{53} & O'_{55} - I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \phi_2 \\ \bar{\phi}_3 \\ \phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2 . 45)$$

其中

$\{ O'_{15} \} = \{ P \} \{ O_{15} \}$

$\{ O_{15} \} = \{ O_{151} , O_{152} , O_{153} , O_{154} \}^T$

$\{ O'_{25} \} = \{ P \} \{ O_{25} \}$

$\{ O_{25} \} = \{ O_{251} , O_{252} , O_{253} , O_{254} \}^T$

$\{ O'_{35} \} = \{ P \} \{ O_{35} \}$

$\{ O_{35} \} = \{ O_{351} , O_{352} , O_{353} , O_{354} \}^T$

$\{ O'_{55} \} = \{ P \} \{ O_{55} \}$

$\{ O_{55} \} = \{ O_{551} , O_{552} , O_{553} , O_{554} \}^T$

將 (2 . 45) 式表示為

$$\begin{Bmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \phi_2 \\ \bar{\phi}_3 \\ \phi_5 \end{Bmatrix} = [B]^{-1} \begin{bmatrix} z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2 . 46)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} O_{11} - F & O_{12} \cdot \frac{\sigma^2}{g} & O_{13} & O'_{15} \\ O_{21} & O_{22} \cdot \frac{\sigma^2}{g} - I & O_{23} & O'_{25} \\ O_{31} & O_{32} \cdot \frac{\sigma^2}{g} & O_{33} - R & O'_{35} \\ O_{51} & O_{52} \cdot \frac{\sigma^2}{g} & O_{53} & O'_{55} - I \end{bmatrix}$$

由(2.46)式可求得假想邊界面法線方向速度勢 $\bar{\phi}_1$ 及 $\bar{\phi}_3$ ，並可得水面之波高比 $|\zeta/\zeta_0| = |\phi_2|$ 和板上之速度勢 ϕ_5 。

將求得之 $\bar{\phi}_1$ 及 $\bar{\phi}_3$ 代入(2.27)及(2.28)式即可求得反射率與透過率；而將 ϕ_5 代入(2.29)~(2.31)式即可求得平板之運動振幅 η/ζ_0 ， ω/ζ_0 ， ξ/ζ_0 ，若欲求得領域內之速度勢，則可依(2.17)式求得，同時亦可由運動振幅及回轉角依(2.40)式求得索拉力。

2.9 以張力索方式(Tension leg)繫留

當繫留索以垂直方式繫留於水平板時，則(2.15)式為

$$\left. \begin{aligned} K_{xx} &= 0 \\ K_{zz} &= K_0 \\ K_{x\theta} &= K_{\theta x} = 0 \\ K_{\theta\theta} &= K_0 \cdot \ell^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.47)$$

繫留索拉力則為

$$F/\zeta_0 K_0 = -z'_0/\zeta_0 \dots\dots\dots (2.48)$$

2.10 水平板之自由運動

當前節所述的情況中的水平板，不以繫留索加以繫留，水平板會受入射波作用而作自由運動，即 $\rho' = \rho$ ， $K_{xx} = K_{\theta x} = K_{x\theta} = K_{zz} = K_{\theta\theta} = 0$ ，(2.29)~(2.31)式則為

$$\left. \begin{aligned} \xi/\zeta_0 &= \frac{ig}{2d\ell\sigma^2} \int_{-qh-d/2}^{-qh+d/2} (\phi_{54} - \phi_{52}) dz \\ \eta/\zeta_0 &= \frac{ig}{2d\ell\sigma^2} \int_{-\ell}^{\ell} (\phi_{51} - \phi_{53}) dx \\ \omega/\zeta_0 &= \frac{ig}{2/3 d\ell^3\sigma^2} \left[\int_{-qh-d/2}^{-qh+d/2} (\phi_{54} - \phi_{52}) \cdot (z - z_0) dz + \int_{-\ell}^{\ell} (\phi_{51} - \phi_{53}) x dx \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots (2.49)$$

平板上之法線方向之勢函數導函數(2.32)式及(2.33)式則成爲

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{2d\ell} \int_{-qh-d/2}^{-qh+d/2} (\phi_{54} - \phi_{52}) dz + \frac{1}{\frac{2}{3}d\ell^3} (z - \bar{z}_0) \left[\int_{-qh-d/2}^{-qh+d/2} (\phi_{54} - \phi_{52}) \cdot (z - \bar{z}_0) dz + \int_{-l}^l (\phi_{51} - \phi_{53}) \cdot x \cdot dx \right] \dots\dots\dots (2.50)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{1}{2d\ell} \int_{-qh-d/2}^{-qh+d/2} (\phi_{51} - \phi_{53}) dx - \frac{1}{\frac{2}{3}d\ell^3} \cdot x \cdot \left[\int_{-qh-d/2}^{-qh+d/2} (\phi_{54} - \phi_{52}) \cdot (z - \bar{z}_0) dz + \int_{-l}^l (\phi_{51} - \phi_{53}) \cdot x \cdot dx \right] \dots\dots\dots (2.51)$$

三、數值計算例與結果

本文進行數值計算時，取水深 h 爲代表單位，假想邊界面定於板中心向左、右各 6 倍水深處，其節點數之設定如圖 2 所示， N_{51} 及 N_{53} 則在元素長度約爲 $0.1h$ 的原則下隨水平板長度而變。

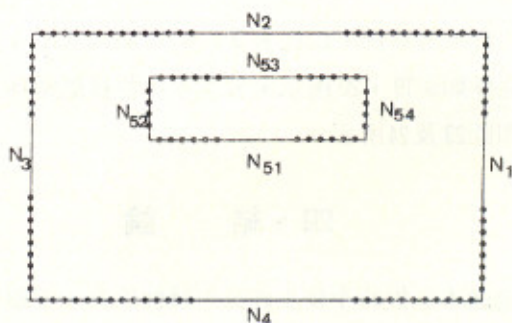


圖 2 節點數之分割

3.1 繫留水平板的運動

本文繫留方式採如圖 1 所示方式繫留，以板長 $2\ell = 0.75h$ ，水平板密度 $\rho' = 0.8$ ，板厚 $d = 0.05h$ ，繫留點至板中心的垂距 $d_0 = 0.02h$ ， $q = 0.25$ 及 0.5 而變化其繫留角度以 $h_0/\ell_0 = 0.5$ 、 1.0 、 2.0 及 ∞ (Tension leg) 爲例作比較，其各運動振幅如圖 3 ~ 10 所示；另對繫留角 $h_0/\ell_0 = 1.0$ 時，改變其繫留索彈性係數 $K_0 = 0.75$ 、 1.0 、 1.5 加以比較，其運動振幅如圖 11 ~ 18 所示；圖 3、4 所示爲繫留水平板之水平位移，發現在 $h_0/\ell_0 = 1.0$ 時，其運動位移最大，而以張力索繫留下之值最小， $h_0/\ell_0 = 0.5$ 及 $h_0/\ell_0 = 2.0$ 之值則介於兩者之間，同時亦發現其共振週期無論 $h_0/\ell = 0.5$ 或 2.0 及 ∞ 皆有較 $h_0/\ell_0 = 1.0$ 之共振週期更傾向於短週期處的現象；圖 5、6 所示爲水平板的垂直位移，由圖 5、6 比較結果發現，繫留水平板的垂直位移在繫留角 $h_0/\ell_0 = 0.5$ 、

2.0 及 ∞ 時，其第二共振週期有較 $h_0/\ell = 1.0$ 之第二共振週期趨向於較短週期的現象，同時在同一繫留條件，但不同繫留深度時，則以繫留深度（ q 值）較大者，其第二共振週期有傾向於較長週期處的現象；圖 7、8 所示為水平板繫留索受力情形，在較長週期處， $h_0/\ell_0 = 1.0、2.0$ 及 0.5 之繫留角繫留下，其繫留索受力則趨向於某一較大值，但張力索繫留時，則產生第一共振，此係張力索不受水平位移影響所致，而在第二共振時，其特性則仍有前述現象發生；由以上圖 3 ~ 10 所示，我們發現一結果顯示，在同一繫留條件但不同繫留角時必存在有一繫留角 h_0/ℓ_0 使各運動位移和繫留索受力達最大值；圖 11、12 所示為在繫留角 $h_0/\ell_0 = 1.0$ 時，以三種不同彈性係數值之繫留索繫留所得水平板的水平位移，由圖發現繫留索彈性係數越大，則其發生共振的週期則越趨向於較短週期處，同時同樣的繫留條件但繫留深度不同時，則仍以繫留深度較大者，其共振週期更趨向於長週期處，發現結果與前述同，唯在 $q = 0.25$ （圖 13） $K_0 = 0.75$ 時，其垂直位移於 $\sigma^2 h/g = 1.9$ 附近有等於零的現象發生而 $q = 0.5$ 時則並無發現此種現象，此可能由於彈性係數較小且較接近水面，由波浪所引起之上揚力與繫留索恢復力抵消的緣故；圖 15、16 所示為水平板的旋轉角，由圖所示，皆於較短週期處有共振發生，而於較短週期處有一第二共振發生，唯 $q = 0.25、K_0 = 0.75$ 時，並未發現第二共振現象，且於 $\sigma^2 h/g = 2.3$ 時有旋轉角等於零的現象發生；圖 17、18 所示為繫留索受力的情形。

3.2 水平板的自由運動

水平板自由浮體運動的數值計算例，以板長 $2\ell = 0.5h, 1h$ ，板厚 $0.05h$ ， $q = 0.25, 0.5$ ；計算結果水平板的水平位移如圖 19、20 所示，發現水平位移隨週期之減小而變小，垂直位移如圖 21 及 22 所示，水平板之旋轉如圖 23 及 24 所示。

四、結 論

本文理論解析考慮波通過水平板時不發生碎波的綫性問題，並瞭解水平板的運動特性，以後則將針對有限振幅波通過水平板後發生分裂及波通過水平板後發生碎波情況加以探討。

參 考 文 獻

- (1) 井島・田淵・湯村（1972）：“有限水深の波による圓柱狀浮體の運動”，日本土木學會論文集，第 206 號。
- (2) 周宗仁（1983）：“邊界元素法在波浪力學之應用”，台灣海洋學院河海工程學會。
- (3) 周宗仁、左羅航（1985）：“斜波面上碎波波型之數值計算研究”，第八屆海洋工程研討會論文集。

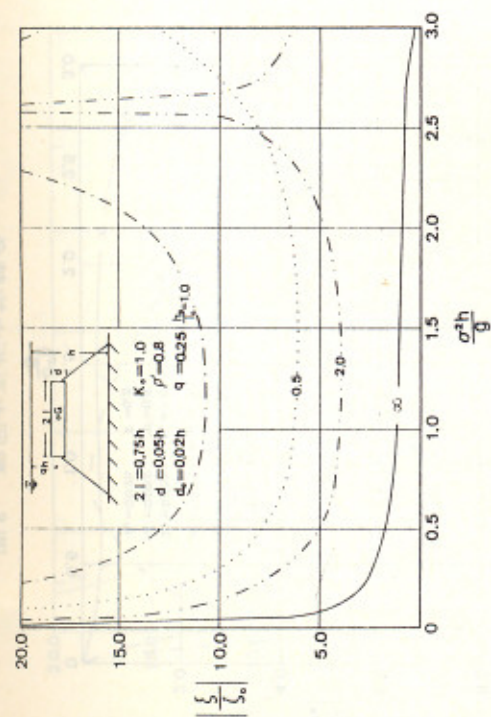


圖 3 繫留水平板之水平位移

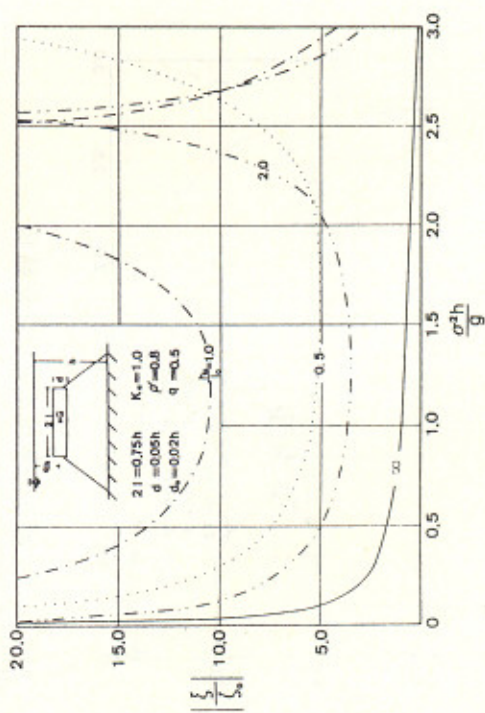


圖 4 繫留水平板之水平位移

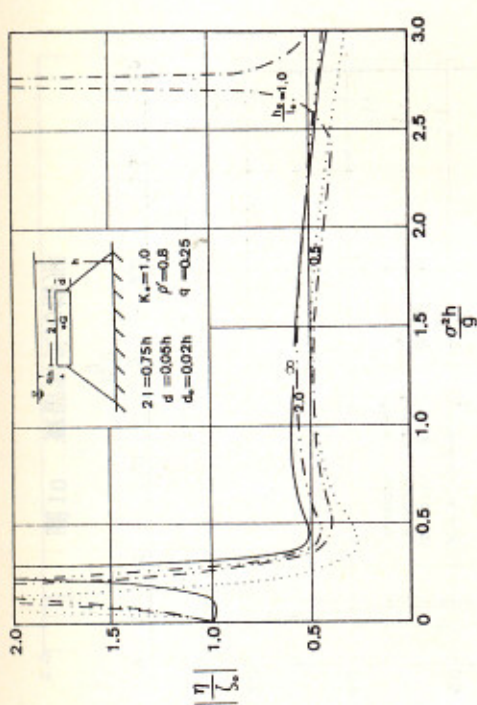


圖 5 繫留水平板之垂直位移

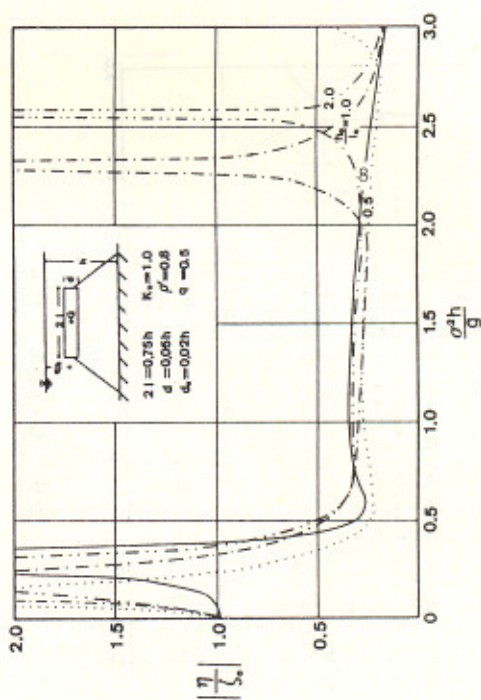


圖 6 繫留水平板之垂直位移

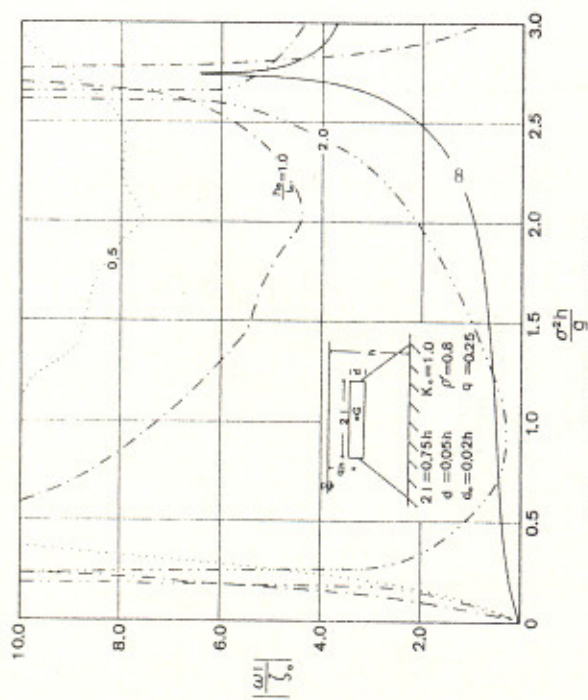


圖7 繫留水平板之旋轉角

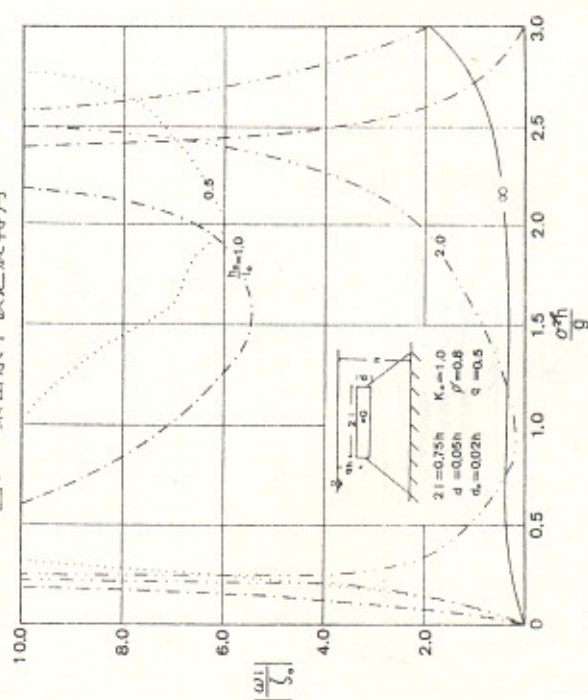


圖8 繫留水平板之旋轉角

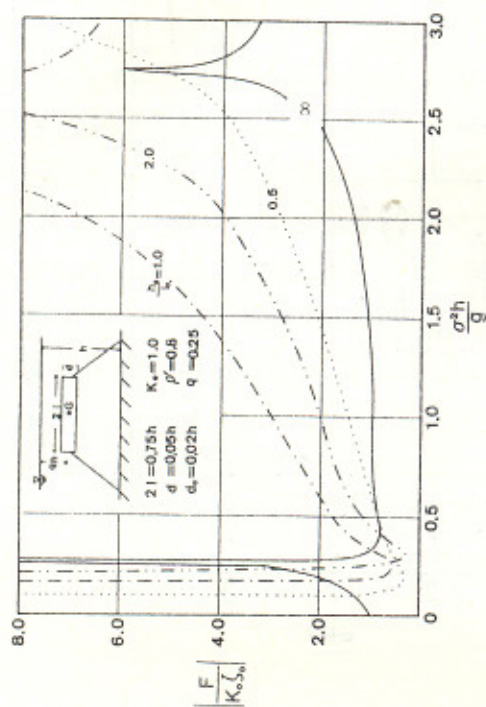


圖9 繫留索受力情形

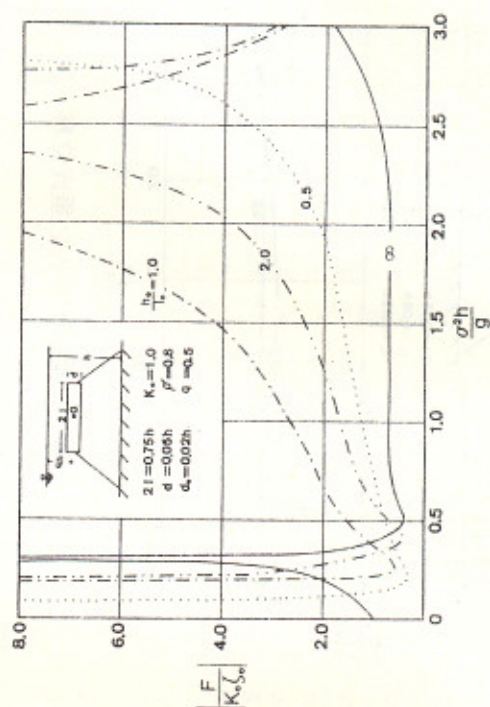


圖10 繫留索受力情形

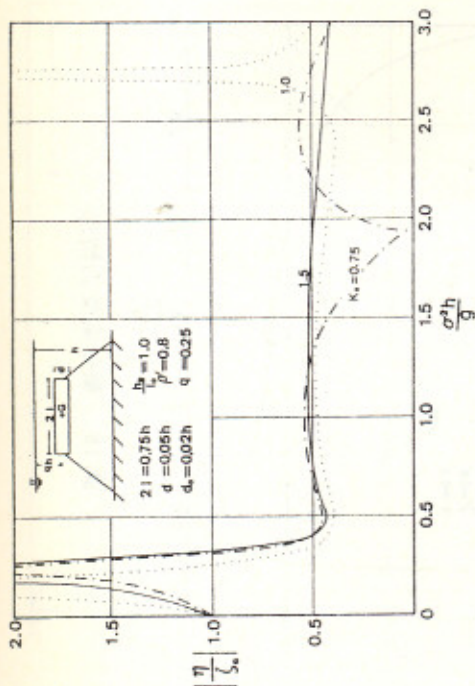


圖 13 繫留水平板之垂直位移

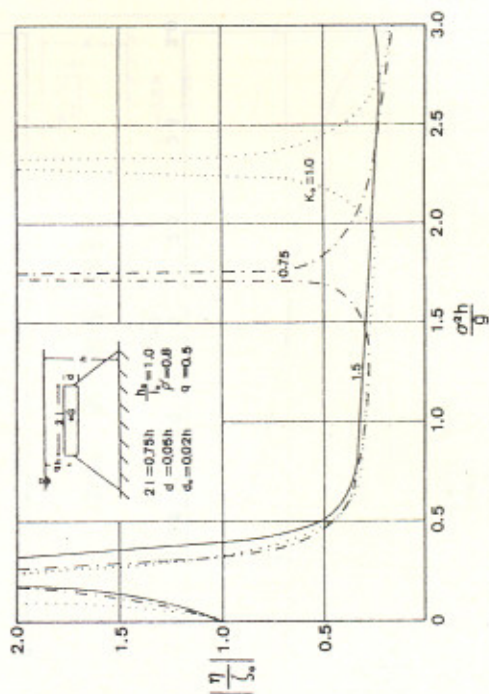


圖 14 繫留水平板之垂直位移

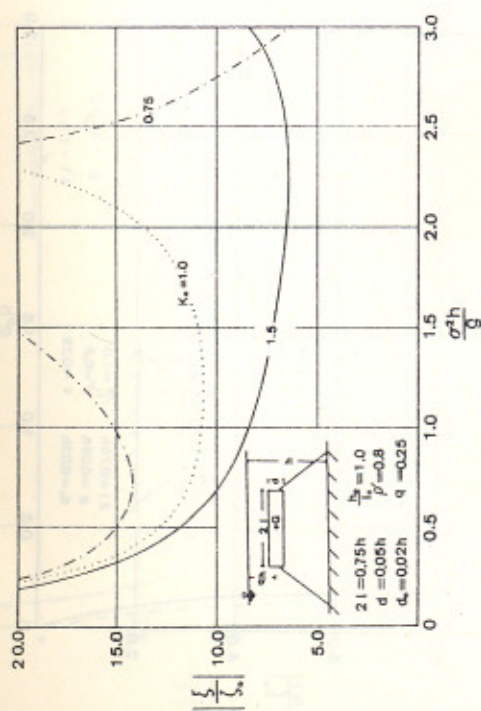


圖 11 繫留水平板之水平位移

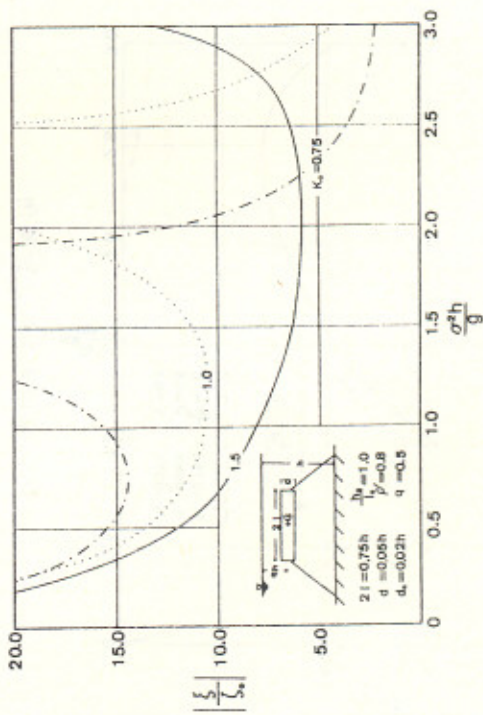


圖 12 繫留水平板之水平位移

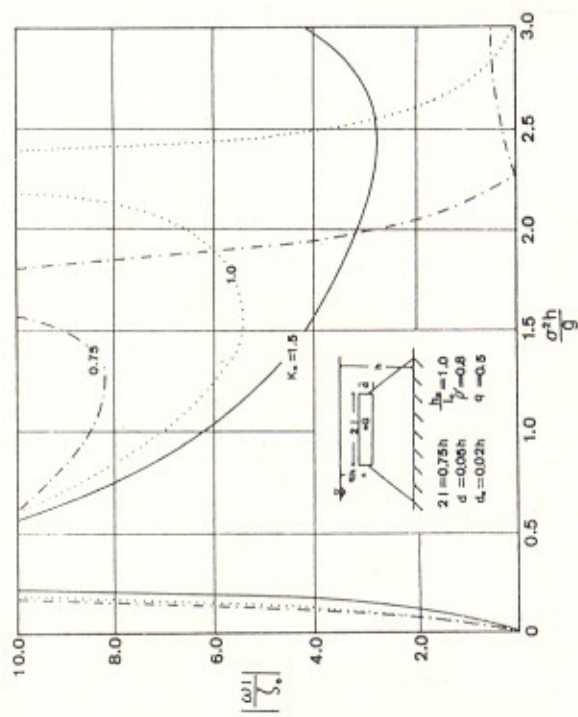


圖 15 繫留水平板之旋轉角

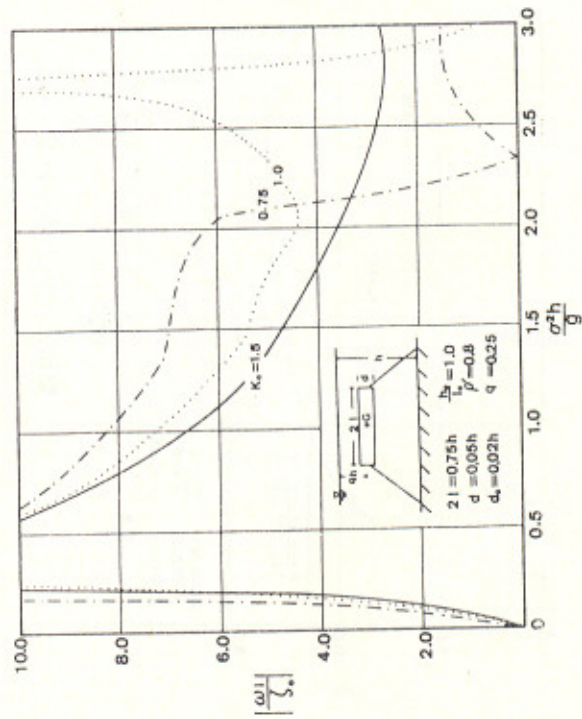


圖 16 繫留水平板之旋轉角

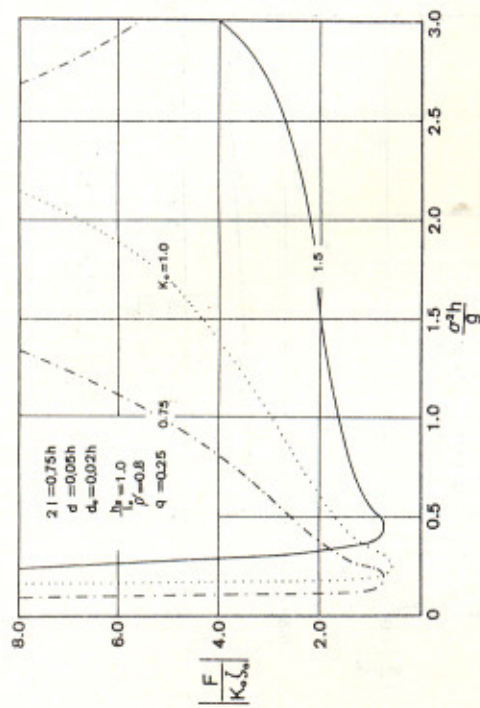


圖 17 繫留索受力情形

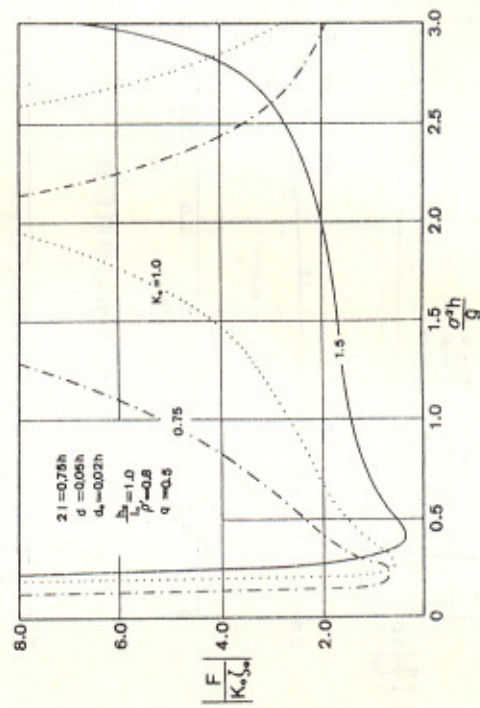


圖 18 繫留索受力情形

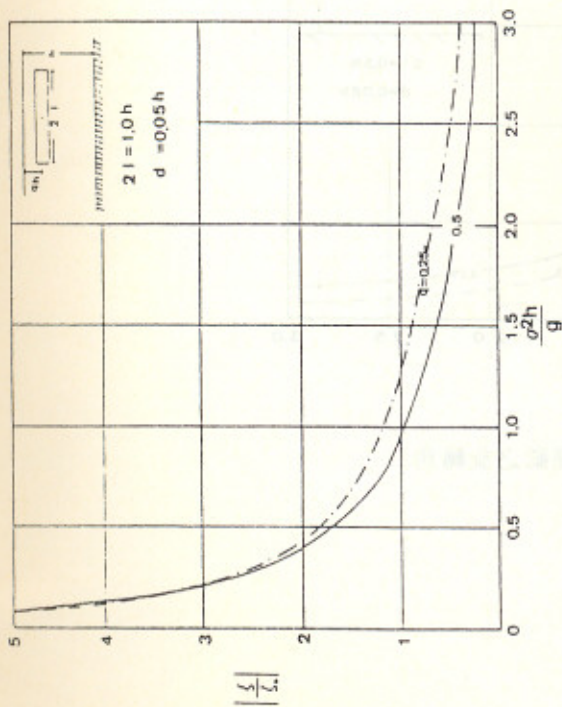


圖 19 水平板自由運動之水平位移

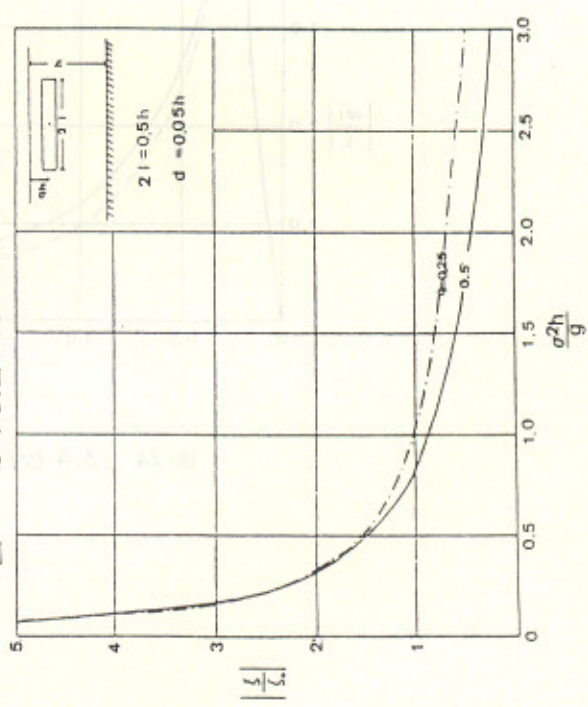


圖 20 水平板自由運動之水平位移

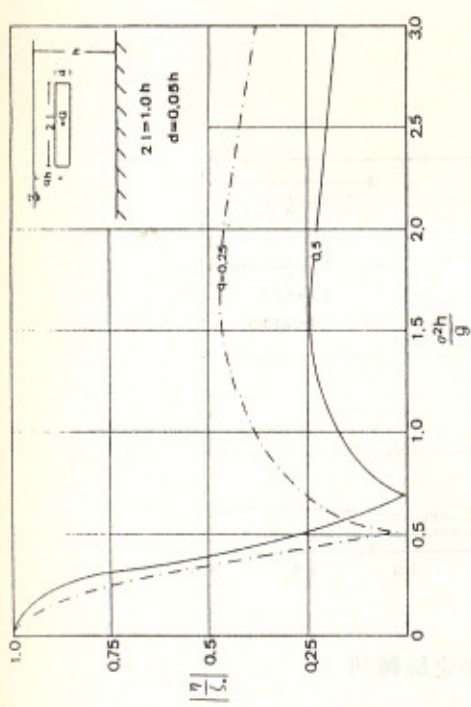


圖 21 水平板自由運動之垂直位移

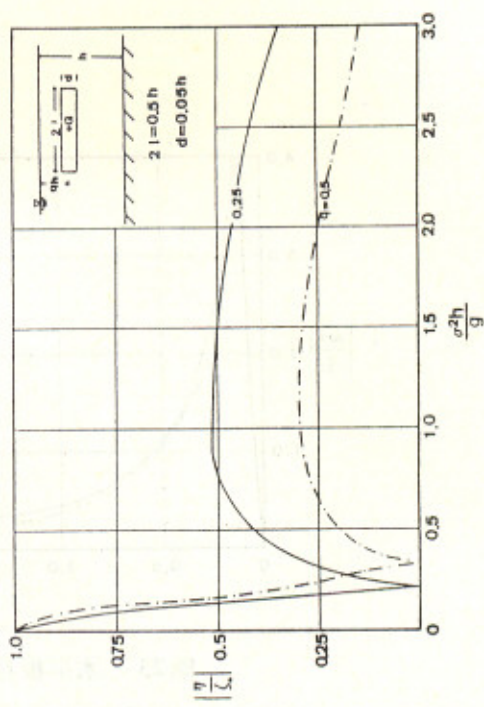


圖 22 水平板自由運動之垂直位移

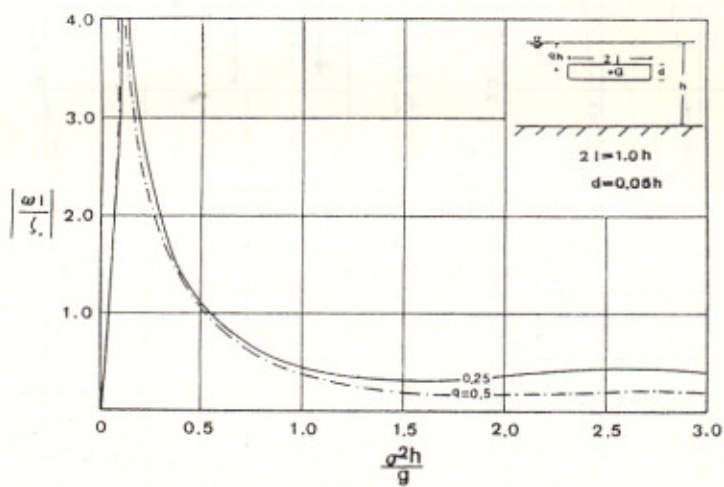


圖 23 水平板自由運動之旋轉角

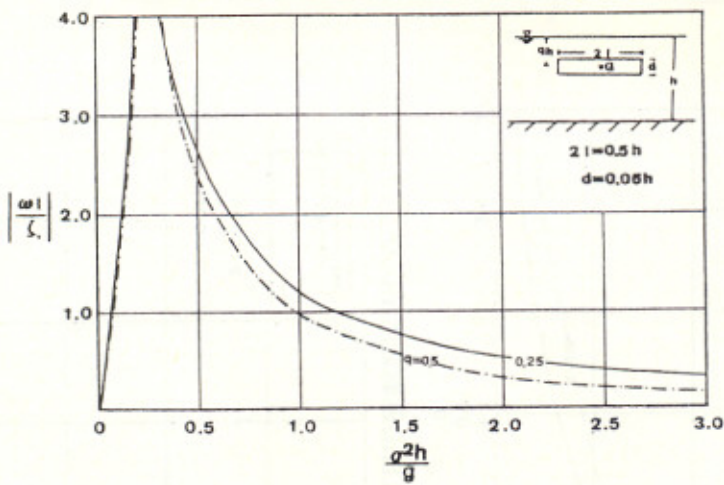


圖 24 水平板自由運動之旋轉角