

有關平面造波水槽內波場方向分佈函數的探討

周宗仁¹ 尹 彰² 林昭圭² 黃偉柏³

摘要

以往在實驗造波水槽中模擬波浪時，由於受到造波設備的限制，往往只能造出單一方向規則波或是給定目標頻譜的單方向不規則長峰波。而實際的海面波場不僅包含有多種頻率的波動，也包含了多方向性的特質。因此，利用三維的頻譜來描述或模擬一個海面上紊亂的波場能量，應該是較為完整的。本實驗利用多方向不規則波造波機在平面造波水槽裡進行了一些有關方向頻譜的實驗，以『傅利葉級數展開法』及『最大似然估計法』計算出波場的『方向散佈函數』，並藉以探討平面造波水槽波場能量的分佈情形。

On the generation and analysis of the spreading function in a laboratory wave basin

Chou Chung-Ren¹ Jaw-Guei Lin² John Z.Yim² Wei-Po Huang³

Abstract

A series experiments have been carried out using the multi-element wave generator which is constructed in the "Ocean Engineering Laboratory" of Department of Harbour and River Engineering, National Taiwan Ocean University. Several star array of wave gauges are used for recording the time series of wave profiles. The result spectrum are then compared with the theoretical predictions. Finally, the "Discrete Fourier Expansion Method (DFE)" and the "Maximum Likelihood Method (MLM)" are applied on estimating the directional spreading functions and the distribution of wave energy field in the wave tank is discussed.

一、前言

以往海岸工程的水工模型試驗，受制於實驗設備，一般以斷面水槽的單方向規則及不規則的長峰波作為設計依據。但是，實際上海洋的波浪卻是由各種不同週期和方向成份的短峰波所組成。因此，如果以傳統的二維頻譜來討論海面的能量分佈情形，實際上有其不足之處。在五〇年代，學者在二維頻譜加入所謂的『方向散佈函數』

(spreading function)來表示波場裡能量的發散程度。以線性理論疊加的觀念來陳述，就是海面上是由各個不同進行方向及週頻率的成分波疊加而成。因此，如果用三維方向頻譜以頻率、能量和進行方向為自變數來描述實際海洋的波浪現象應該比二維的頻率譜更為貼切。

因為海洋波浪具有方向性，所以如果能在實驗室裡模擬出類似海面上的短峰波的話，所得到的實驗結果就會更與實際現象相符。隨著科技進步，高速電腦的發展日趨成熟，多方向造波機也隨著問世。海洋大學、河海工程學系的『海洋工程綜合實驗館』的平面造波水槽（50m×50m×

1. 國立台灣海洋大學教授

2. 國立台灣海洋大學副教授

3. 國立台灣海洋大學博士班研究生

1m) 就配置了一部長 28m 的多方向蛇形造波機。為了能瞭解水槽的特性及多方向波浪在波場的能量分佈情形，本研究利用這套設備進行了一系列的實驗，並且以傅利葉級數展開法(Discrete Fourier Expansion Method, DFE) 和最大似然估計法(Maximum Likelihood Method, MLM)，估算波場裡的方向散佈函數。比較理論值與實驗的結果後發現。估測所得的波場能量分佈的結果與目標值有一定的差距。為了進一步瞭解差異的原因，本文從理論以及所量測的自我譜(auto-spectrum)和交叉譜(cross-spectrum)，藉著評估兩者之間的差異，找出實驗結果偏離理論值的原因。以便提供將來研究相關問題的一個改進基礎，能進一步在水槽中更貼切地模擬出實際海洋波浪的現象。

接下來本文分為四部份：第二部份提到一些相關的理論基礎；第三部份介紹所使用的儀器及設備；第四部份將實驗結果與理論值比較討論；最後一部份張則是結論。

二、相關理論

對波面變化記錄 $x(t)$ ，在時間 $[0, T]$ 內以 Δt 的間隔擷取資料，可以得到離散序列 $\{x_n\}$ ：

$$\{x_n\}, n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (1)$$

其中 $x_n = x(n\Delta t) = x(t_n)$ ， Δt 是取樣間隔，

$$\Delta t = \frac{T}{N}$$

為將傅利葉積分式離散化，首先假設 $x(t)$ 為一個週期 T 之函數， T 是記錄時間總長度。則可把這些序列做離散傅利葉轉換(DFT, discrete Fourier transform)而得到：

$$X(f_n) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi n f_n / N} \quad (2)$$

其中 $f_n = n\Delta f$ ， $\Delta f = \frac{1}{T}$ ， $-\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2}$ ，或

$$-\frac{1}{2\Delta t} \leq f_n \leq \frac{1}{2\Delta t}, n = 1, 2, 3, \dots, N$$

T 是取樣長度，而 $\frac{1}{2\Delta t}$ 則是所謂的折疊頻率(Nyquist) f_N ，則在時間 $[0, T]$ 的波面變化記錄 $x(t)$ 的頻率譜 $s_x(f)$ 即是：

$$s_x(f) = \frac{1}{T} [X(f, T)]^2 = \frac{1}{N\Delta t} \left[\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi n f / N} \right]^2 \quad (3)$$

對波高計陣列中的分別在 (x, y) 及 $(x+a, y+b)$ 兩波高計所量測得的波面記錄 $\eta(x, y, t) = \eta^-$ 和 $\eta(x+a, y+b, t+\tau) = \eta^+$ 進行離散傅利葉變換，可得到式(4)和式(5)。其中 a, b 分別為兩根波高計在 x 軸及 y 軸的相對座標。

$$A_m = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \eta^+ e^{-i2\pi m n / N} \quad (4)$$

$$B_m = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \eta^- e^{-i2\pi m n / N} \quad (5)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

根據交叉譜 $P_{\eta\eta}$ 的定義可由式(4)和式(5)得：

$$P_{\eta\eta} = \frac{\overline{A_m B_m}}{T} = c_{\eta\eta} - i q_{\eta\eta} \quad (6)$$

令

$$Q_{\eta\eta} = \overline{P_{\eta\eta}} = c_{\eta\eta} + i q_{\eta\eta} \quad (7)$$

其中， $\overline{P_{\eta\eta}}$ 是交叉譜 $P_{\eta\eta}$ 的共軛譜

根據 Borgman(1969)指出，函數 $c_{\eta\eta}$ 和 $q_{\eta\eta}$ 分別為同相譜與正交譜(co-spectrum 和 quadrature-spectrum)。它們與方向頻譜 $s(f, \theta)$ 之間的關係分別是：

$$c_{\eta\eta}(f) = \int_{-\pi}^{\pi} s(f, \theta) \cos(ka \cos \theta + kb \sin \theta) d\theta \quad (8)$$

$$q_{\eta\eta}(f) = \int_{-\pi}^{\pi} s(f, \theta) \sin(ka \cos \theta + kb \sin \theta) d\theta \quad (9)$$

$$Q_{\eta\eta} = c_{\eta\eta}(f) + iq_{\eta\eta}(f) \\ = \int_{-\pi}^{\pi} s(f, \theta) e^{ik(a \cos \theta + b \sin \theta)} d\theta \quad (10)$$

一般以方向頻譜 $s(f, \theta)$ 來表示波場能量的散佈情形。通常採用 Longuet-Higgins 於 1963 年提出的建議，把波場能量散佈以函數的形式 $G(f, \theta)$ 表示，並稱之為方向方向散佈函數，而認為方向頻譜 $s(f, \theta)$ 與週頻率譜 $s(f)$ 間存在下列的關係：

$$s(f, \theta) = s(f) \cdot G(f, \theta) \quad (11)$$

因為頻率譜 $s(f)$ 無須考慮方向性，所以

$$s(f) = \int_0^{2\pi} s(f, \theta) d\theta \quad (12)$$

理論上，雖然一個波場的能量可能分佈在不同方向上，但是其總能量應是固定的。所以方向散佈函數應符合下面的條件：

$$\int_0^{2\pi} G(f, \theta) d\theta = 1 \quad (13)$$

本實驗室的多方向造波機的造波程式則是以 Mitsuyasu 於 1975 年所提出的方向散佈函數來造波。其方向方向散佈函數形式如下：

$$G(f, \theta) = G_0 \cos^{2r} \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (14)$$

其中 θ 是依波浪的主方向，以 x 軸向逆時針方向所求的夾角。

$$G_0 = \left[\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2r} \left(\frac{\theta}{2} \right) d\theta \right]^{-1} \quad (15)$$

參數 s 代表方向波譜在主頻方向的能量集中度。Goda(1985)為了工程應用的方便性將參數 s

修正為式(16)：

$$s = \begin{cases} S_{\max} \cdot (f/f_p)^{-2.5} & : f \geq f_p \\ S_{\max} \cdot (f/f_p)^5 & : f \leq f_p \end{cases} \quad (16)$$

其中

S_{\max} ：為散佈參數 s 尖峰值。

f_p ：表示頻譜峰值的頻率。Goda(1985)認為其與示性波高的關係可以用下式表示：

$$f_p = 1/(1.05T_{1/3}) \quad (17)$$

圖 1 是主頻是 1.0Hz 時， S_{\max} 分別等於 10、20、50 的方向散佈函數圖。從圖裡可發現，散佈參數 S_{\max} 值愈大表示能量愈集中；反之，則能量散佈範圍較大。另外 Goda(1985)指出主頻值愈小，能量也會愈集中；反之，則能量散佈範圍較大，且大約 85% 的能量會集中在波浪進行主方向 $\pm 30^\circ$ 的範圍。

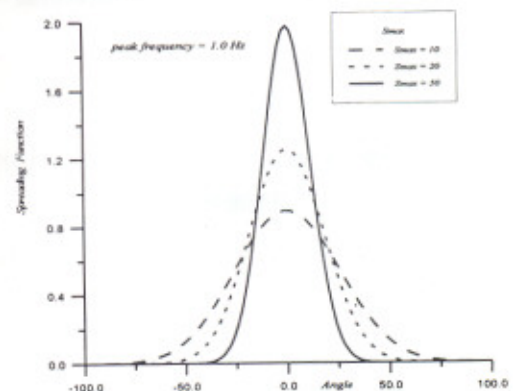


圖 1 主頻=1.0Hz 方向散佈函數比較圖

在解析方向散佈函數中，Borgman(1969)採用波高計陣列擷取波面記錄並以傅利葉級數展開法估算波場裡的方向散佈函數。針對每一分頻的方向散佈函數 $G(f, \theta)$ 的傅利葉級數展開式可表為式(18)：

$$G(f, \theta) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad (18)$$

另外，最大似然估計法則是利用在機率理論

裡推導所要套配模式參數的一種方法。換言之，就是在估計方向方向散佈函數時，把各交譜對估算結果的影響加權後的總和減到最小。公式可表示為：

$$G(f, \theta) = \frac{a_0}{\{y\}^T [P]^{-1} \{y\}} \quad (19)$$

其中 a_0 為滿足式(13)的無因次參數， $\{y\}$ 是加權函數矩陣。

$$\{y\} = \begin{bmatrix} \exp\{ik \cdot x_1\} \\ \exp\{ik \cdot x_2\} \\ \vdots \\ \exp\{ik \cdot x_N\} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$[P]$ 是無因次交譜所構成之矩陣

$$[P] = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1N} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{N1} & P_{N2} & \dots & P_{NN} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$P_{ij} = \frac{S_{ij}}{\sqrt{S_x S_y}} \quad (22)$$

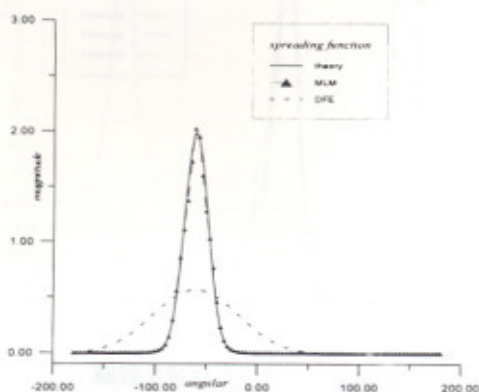


圖 2 理論方向散佈函數比較圖

圖 2 分別是當目標頻譜是 JONSWAP、散佈參數 $S_{max} = 50$ 、波浪入射角 θ_0 是 -60° 時，從理論的一維頻譜與波高計間的理論交譜所估算的方

向散佈函數與理論值互相比較的結果。從圖裡可以看出來，最大似然估計法所估計出來的結果與理論值非常接近。而利用傅利葉級數展開法所估算的方向散佈函數，能量則顯得比較發散，這是由於受限制於波高計陣列的波高計數目，在使用有限項的傅利葉級數來表示方向散佈函數時會有失真之處。但是整體上來說，兩種方法皆能正確地估算出波場能量集中的主方向。

三、實驗設備及量測方法

本實驗採用 $f_p = 1.0, 1.2, 1.4$ Hz 三種條件。由於造波程式在輸入造波條件時，需以示性波高及示性週期輸入，經由式(17)換算輸入條件如下表：

表 1 造波條件

造波條件/造波目標波譜	Bretschneider-Mitsuyasu JONSWAP
主頻(Hz)	1.0; 1.2; 1.4
示性波高 $H_{1/3}$ (cm)	9.6; 6.7; 4.9
示性週期 $T_{1/3}$ (sec)	0.93; 0.78; 0.67
造波主方向	90° ; 135°
方向散佈函數參數 S_{max}	10; 20; 50

本實驗使用到的相關設備簡述如下：

1. 實驗水槽：水槽長、寬各 50 公尺，深 1 公尺。水槽底部及側壁為鋼筋混凝土結構。實驗是在等水深的條件下進行。
2. 造波機：由七部日本本田工業株式會社(Honda Engineering Co. Ltd)出廠的多方向不規則造波機所組成。每部造波機控制八片造波板，造波板總長為 28 公尺，可造出任一方向 ($0 \leq \theta_0 \leq \pi$)， θ_0 是造波主方向、不同週期 ($0.5 \text{ sec} \leq T_{1/3} \leq 5 \text{ sec}$) 之規則波與不規則波波列。
3. 波高計及波高計增幅器：進行實驗時，使用全英公司製造之 50 公分長之容量式波高計擷取數據。經由增幅器，與個人電腦連線記錄。波高計增幅器每部為 6 頻式。本試驗使用 26 個頻道，包含一組量測入射波高(兩根波高計)及六組量測方向頻譜的波高計陣列(每組四

根)。實驗配置圖如(圖 3)。

4. 記錄器：由 TEAC 公司製造的 DR-F1 類比 / 數位轉換器(A-D converter)。將波高計所傳回之類比訊號(電壓值)轉換成數位訊號以機械碼記錄於 1.2MB 軟式磁碟機，資料擷取頻率是 50Hz 每次實驗擷取 6144 個資料點。
5. 分析軟體：造波完成後，把 DR-F1 類比 / 數位轉換器所記錄訊號，轉換成波面記錄後再做處理。但受限於轉換器只有八個頻道，因此在處理實驗數據時，一次僅能對兩組波高計陣列(八個測點)做處理。

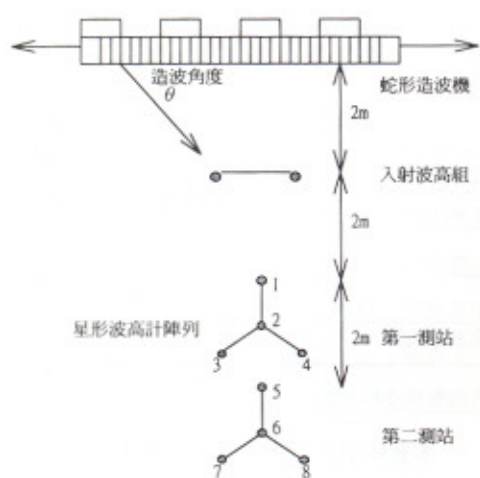


圖 3 實驗配置圖

四、實驗結果與討論

理論上來講，單方向不規則波的能量都集中在一個方向，方向散佈函數的圖形則會在主方向成一個直線峰值。也就是說散佈參數 S_{max} 是無限大的。根據 Goda(1985)的說法，散佈參數 $S_{max} = 75$ ，即是代表能量相當集中的湧浪波場。因此為了數學上的計算，本研究散佈參數 S_{max} 值採用 500，來代表單方向波浪的能量方向特性。為明瞭在估計實驗數據方向散佈函數所可能遇到的問題，先從解析單方向不規則波著手，以便得到一些定性的結果。

圖 4 是入射角為 90° 、單方向不規則波、主

頻 $f_{peak} = 1.0 \text{ Hz}$ 、目標頻譜 JONSWAP 的理論、傅利葉級數展開法及最大似然估計法估計的方向散佈函數圖。從圖上可以發現，實驗所推估方向散佈函數能量的主方向與理論值偏差了 8° 。推論原因有二：(1)波高計陣列擺設的角度與實際方向有差異。(2)從圖 5 的各測點頻譜圖來看，其能量分佈的情形並不一致，以致在交譜的計算造成誤差。

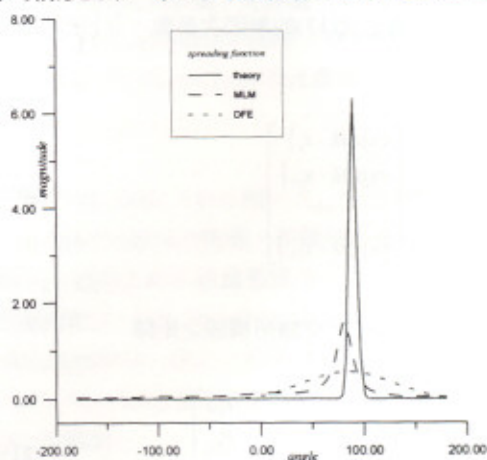


圖 4 實驗方向散佈函數比較圖

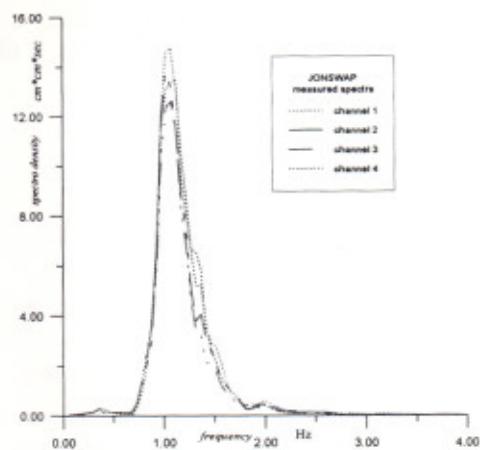


圖 5 各測點頻譜比較圖

圖 6 為與前述相同實驗條件下，測點二對三和測點二對四的同相譜。測點三和四的位置是相對稱於造波機的法線，且平行於造波板(參考圖三)，在造正向長峰波時，理論上測點三和四不應該有相位差，但是從圖六的結果發現其同相譜並

不一致。

如前所述，各測點間的交譜決定了方向頻譜計算的正確與否，因為方向頻譜是從交譜中所含的相位資料，以及他們各個測點之間相對位置的關係中求出來的。從這點引發出另一個問題—波高計陣列的尺度大小；Paniker(1971)提到波高計之間的距離需小於解析波長的 $1/2$ ，才可得到較佳的近似解。而針對不同的波場特性，也應該用不同大小的波高計陣列來做量測。一般而言，陣列中波高計間距離如果較小，則可測得分波中波長較小的波，求得分佈範圍較大的方向散佈函數值；相反地，陣列中各波高計間的距離如較大，只可解析成分波中波長較大的波，所求得的方向散佈函數範圍則較集中。但如果陣列尺度過大時，會使求得的方向散佈函數出現數個峰值，使方向頻譜顯得不合理。因此，設計適當的陣列大小極為重要。

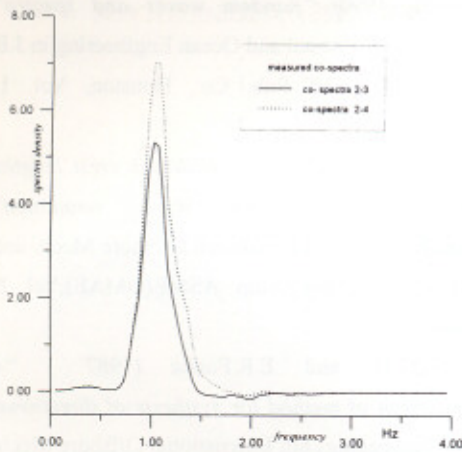


圖 6 同相譜比較圖

另外，本次實驗的波場是屬於等水深，只要量測時間長度足夠的話，一般可假設波場符合遍歷性 (ergodic)。也就是說不管在波場任一地點量測，其結果皆是相同的。如果以統計方式來解釋，就是在解析頻譜時，各成分的能量變化機率之集合，必為定常。但是，從實驗結果看來，實驗水

槽的波場並不符合遍歷性。因此，測站的擺設位置會直接影響與實驗結果。

圖 7 是與圖一相同實驗條件下的三維頻譜圖，從圖上可以發現在除了正方向有能量外，負角度方向也有能量的分佈，雖然能量仍密集在主方向上，但是卻比理論值低。參考 Miles(1991)在加拿大水工實驗室模擬暴風的實驗結果，也有相同的結果。並且計算所量測的能量發現也比理論值低。其原因除了波浪在水槽隨著與造波機距離增加而發生能量消散外，還有計算方向頻譜在 180° 的部分會產生不能分辨波浪的正負方向的情形，而使得部分正方向的能量分散到負方向，造成主頻及主方向的能量比理論值低。

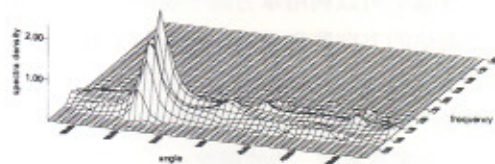


圖 7 實驗三維頻譜圖

圖 8 實驗條件是入射角 45° 、散佈參數 $S_{max} = 10$ 、主頻 $f_p = 1.2\text{Hz}$ 、目標頻譜 Bretschneider-Mitsuyasu 的三維頻譜圖。從圖可以發現兩個現象。(1) 能量散佈的範圍十分大；(2) 波場在這個測站已經分裂成兩個波群，除了在主方向 45° 附近佔有大部分的能量，另一個波群的能量集中在 100° 至 150° 間，但並未有明顯的峰值。第一個現象是由於散佈參數 $S_{max} = 10$ 的原因，其代表波場受到紊流及碎波的影響，各種成分波都可能存在，因此能量散佈的範圍較廣。第二個現象目前尚未得到定論。究竟是由於造波機的特性造成、波浪經岸壁反射繞射的影響；還是由於前述的原因如波高計陣列的尺度設計過大或是擺設測站的位置問題，以致造成數個峰值的產生。有待更進一步的研究。

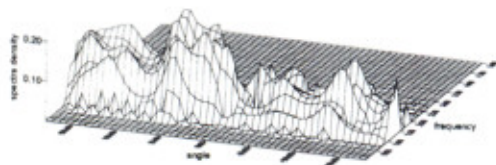


圖 8 多方向造波實驗三維頻譜圖

五、結論

本研究的主要目的是利用傅利葉級數展開法及最大似然估計法計算波場的方向散佈函數，來探討海洋大學『海洋工程綜合實驗館』裡平面造波水槽波場能量的分佈特性。根據前述的討論與分析得到下列幾點結論。

1. 波高計陣列裡的各測點的擺設位置如果有所偏移，則所推估的算方向散佈函數也會偏離理論值。理論上可以利用單方向不規則長峰波的實驗所推估的方向散佈函數對多方向不規則短峰波的方向散佈函數做一修正，但是，由於整個波場並不具遍歷性，利用這樣的修正方法是否恰當，則需要更進一步的研究。
2. 實驗條件的散佈參數 S_{max} 值愈大，所分析出的三維頻譜與目標值也就愈接近。也就是說，能量愈集中的波場，其波浪的方向性也就愈明顯，方向散佈函數的推估也就能愈精確。
3. 利用最大似然估計法推估理論正向 90° 入射波的三維頻譜圖時，發現在主頻及主方向處產生分列的現象，但是輸入的目標頻譜及方向散佈函數並不是雙峰模式，這應該是數值計算所產生的誤差，所以需要發展更精確分析波場能量集中方向的計算方法，以進一步對此現象做一修正。
4. 針對同一個波場，傅利葉級數展開法推估的方向散佈函數會比最大似然估計法所推估的方向散佈函數能量分佈範圍廣。這和以前學者所得到的結論是一樣的。

參考文獻

1. 陳上及、馬繼瑞 (1991) "海洋數據處理分析方

- 法及其應用" 海洋出版社,北京,481-515 頁
2. 蔡東興 (1996) "斷面水槽中不規則波特性探討" 碩士論文,國立台灣海洋大學,基隆,5 頁
3. 黃偉柏 (1998) "平面造波水池之特性探討" 碩士論文, 國立台灣海洋大學, 基隆, 18-23 頁
4. Borgaman, L.E. (1969) "Directional spectra models for design use" Technical Report HEL 1-14, Hydraulic Engineering Laboratory, University of California, Berkeley
5. Bendat, J.S. and A.G. Piersol (1971) "Random data: Analysis and measurement procedures" 2nd ed. John Wiley, New York, pp.56-85
6. Cornett, A. and M.D. Miles (1991) "Simulation of hurricane seas in a multidirectional wave basin" Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering, ASME, Vol. 113, pp.225
7. Goda, Y. (1985) "Random seas and design of maritime structures" University of Tokyo Press, Tokyo, pp.11-39
8. Goda, Y. (1990) "Random waves and spectra" Handbook of Coastal and Ocean Engineering in J.B. Herbich (ed), Gulf Pub. Co., Houston, Vol. 1, pp.175-209
9. Goda, Y. (1993) "Statistics of waves crest lengths based on directional wave simulation" Proceedings, 12th International Offshore Mech. and Arctic Engineering Symp. ASME (OMAE), Vol. 2, pp.161-168
10. Miles, M.D. and E.R. Funke (1987) "A comparison of method for synthesis of directional seas" Proceedings, 6th International Offshore Mech. and Arctic Engineering Symp. ASME (OMAE), Vol. 11, pp.247-255
11. Nwogu, O. (1989) "Analysis of fixed and floating structures in random multi-directional waves" Ph.D. Thesis, University of British Columbia, Vancouver, B. C. Canada, pp.143
12. Plate, E. (尹彰譯) (1995) "連續時間序列的分析" Unpublished manuscript, 1-39 頁