

任意形状の透過および不透過防波堤による波の散乱

SCATTERING OF WAVES BY PERMEABLE AND IMPERMEABLE
BREAKWATER OF ARBITRARY SHAPE

井島 武士*・周 宗仁**・湯村 やす***

By Takeshi Ijima, C.R. Chou and Yasu Yumura

1. はしがき

防波堤による波の散乱の問題は、従来不透過剛体の直線防波堤に対して多くの研究が行われており¹⁾、最近では楕円型島堤に対する合田の解析解²⁾あるいは一般的な堤体配置に対する伊藤の数値解法³⁾などが発表されている。これらの解法はいずれもかなり複雑な関数表現あるいは数値計算を必要とし、対象はすべて不透過堤に限られており、透過堤に対する解析はまだ発表されていない。

本論文は、まず一定水深の海域で任意の形状をもつ透過性防波堤に、一定周波数の正弦波が入射するときの流体運動の理論的解析計算の方法を展開して、その数値計算例を示し、ついで従来取り扱われた不透過堤の場合には、その特別な場合として簡単に計算されることを示している。

ここに述べる方法は、著者⁴⁾がかつて透過性防波堤の2次元問題に対して展開した速度ポテンシャルの接続法を3次元問題に拡張したもので、Greenの定理の応用によってそれが可能となるのである。

透過堤においては、堤体内部での流体運動は、流速に比例する抵抗を受ける空げき物質内の運動と仮定することにより速度ポテンシャルをもつことになるから、流体域を堤体外域と堤体内域に分けると、両者における運動はともに速度ポテンシャルによって表示されることになる。そして、これらの速度ポテンシャルはおのおのの領域の自由表面条件によって決まる固有値による、流体域内の深さ z に関する直交関数系によって無限級数に展開される。この無限級数の各項の係数は平面的な位置 (x, y) の関数で、それぞれの項に対応する Helmholtz の方程式を満足することとなる。ゆえに適当な Green 関

数を用いれば、流体域内の任意点 (x, y) における係数の値は流体域の境界線(ここでは堤外域と堤内域の境界、すなわち防波堤の断面形によって与えられる閉曲線)上の値と境界線への法線方向の微分値とによって決まることとなる。そしてさらに、Green 関数の持つ特異性によって、この境界線上の係数値とその微分値との関係を決める積分方程式が導かれ、この方程式は境界線を適当に細分し、和を取ることにによって、係数値とその法線微分値の関係を定める一次方程式におきかえられる。

一方、力学的には外域と内域の流体運動による、境界線を横切る質量流束とエネルギー流束は連続であるべきことから、境界線上の係数値とその微分値との間に一定の線型な関係式が成立することとなる。

こうして導かれた関係式を連立方程式として解くことにより、境界線上の係数値とその微分値が決定されるから、Greenの定理により、流体域内の任意点での係数値が計算され、速度ポテンシャル従って流体運動が確定されることになる。

不透過堤の場合は、速度ポテンシャルは堤外域のみについて考えればよく、かつ、それは透過堤の場合の第1項だけで表わされ、また境界線上では力学条件から係数の微分値は消えるから、係数値はただ一つの積分方程式のみで決まることとなり、従来のいかなる方法よりも計算式は簡単となる。

ここでは代表的な例として、円形、楕円形および矩形の島堤の場合について、堤体周辺の回折係数と堤体に作用する流体力の計算例を示したが、全く同様にして任意形状の透過性岸壁、あるいは不透過性構造物との組合せについても計算することができるのである。

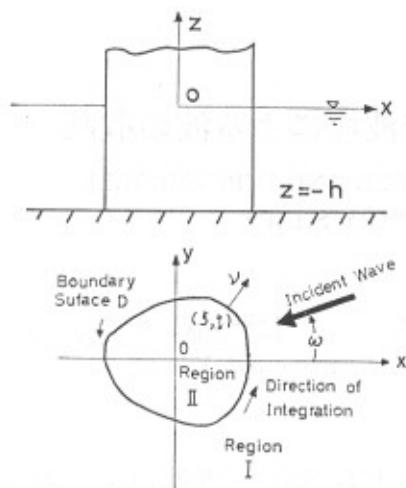
2. 解析 I (透過堤体の場合)

水深が一定で h の海域にある鉛直側面をもつ任意形状

* 正会員 工博 九州大学教授 工学部水工土木学科

** 学生会員 九州大学大学院博士課程

*** 九州大学助手 工学部水工土木学科



Definition Sketch

Fig. 1

の堤体に、周波数 σ ($\sigma = 2\pi/T$, T は周期) の正弦波が入射するものとする。Fig. 1 に示すように、静水面に座標原点 O 、水平面内に x, y 軸、鉛直上方に z 軸を取り、堤体は $x-y$ 面内の閉曲線 D によって示されるとする。流体域を堤体外域 I と堤体内域 II に分け、外域 I の流体運動は自由表面をもつ非圧縮性完全流体の微小振幅運動、内域 II の運動は空けき率 V の物質内で、単位質量の流体に対する抵抗が流速に比例し、その係数が μ であるような Darcy の法則に従う運動であると仮定すると、両者の運動は $\phi(x, y, z) \cdot e^{-i\sigma t}$ の形の数値ポテンシャルをもち、 ϕ は次の Laplace の方程式を満足する。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.1)$$

(1) 外域 I の速度ポテンシャル $\phi_1(x, y, z)$

自由表面と水底条件 (不透過水底面) および無限遠における radiation condition を満足する式 (2.1) の一般解は次式で表わされる⁵⁾。

$$\begin{aligned} \phi_1(x, y, z) = & \frac{g \zeta_0}{\sigma} \left[(f_0(x, y) + f_1(x, y)) \right. \\ & \left. + \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{n=1}^{\infty} f_2^{(n)}(x, y) \frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h} \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

ここで g は重力の加速度、 ζ_0 は入射波の振幅、 k および k_n は次式で決まる固有値である。

$$kh \tanh kh = -k_n h \tan k_n h = \sigma^2 h / g, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (2.3)$$

また、 $f_0(x, y)$ 、 $f_1(x, y)$ 、 $f_2^{(n)}(x, y)$ は x, y の関数として、それぞれ入射波、反射波および停止散乱波を表わすものである。

入射波を x 軸と角度 ω をなして接近する余弦波形とすれば、波形 ζ_0 は、振幅を ζ_0 として次式で表わされる。

$$\zeta_0 = \zeta_0 \cos [k(x \cos \omega + y \sin \omega) + \sigma t] \quad (2.4)$$

これに対する速度ポテンシャルとして $f_0(x, y)$ は次式の実数部分で与えられる。

$$f_0(x, y) = -ie^{-ik(x \cos \omega + y \sin \omega)} \quad (2.5)$$

$f_1(x, y)$ 、 $f_2^{(n)}(x, y)$ は式 (2.1) により、それぞれ次の Helmholtz の方程式を満足すべき関数である。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} + k_0^2 f_1 &= 0 \\ \frac{\partial^2 f_2^{(n)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2^{(n)}}{\partial y^2} - k_n^2 f_2^{(n)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

(2) 内域 II の速度ポテンシャル $\phi_2(x, y, z)$

堤体内域で自由表面と水底条件 (不透過水底面) を満足する式 (2.1) の一般解は次のように表わされる⁶⁾。

$$\phi_2(x, y, z) = \frac{g \zeta_0}{\sigma} \sum_{s=1}^{\infty} f_3^{(s)}(x, y) \frac{\cosh \bar{k}_s(z+h)}{\cosh \bar{k}_s h} \quad (2.7)$$

ここで \bar{k}_s は次式で決まる固有値である。

$$\bar{k}_s h \tanh \bar{k}_s h = \left(1 + i \frac{V \mu}{\sigma}\right) \cdot \frac{\sigma^2 h}{g}, \quad (s=1, 2, 3, \dots) \quad (2.8)$$

また、 $f_3^{(s)}(x, y)$ は式 (2.1) により次の Helmholtz の方程式を満足すべき関数である。

$$\frac{\partial^2 f_3^{(s)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_3^{(s)}}{\partial y^2} + \bar{k}_s^2 f_3^{(s)} = 0 \quad (2.9)$$

(3) Green 関数による f_1 、 $f_2^{(n)}$ および $f_3^{(s)}$ の表示

外域 I と内域 II の境界線 D 上の点を (ξ, η) 、境界線以外の点を (x, y) で表わすと、その距離は $r(x, y; \xi, \eta) = r(\xi, \eta; x, y) = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$ である。

$r \rightarrow 0$ においては $\log r$ の order の特異性をもち、 $r \rightarrow \infty$ においては Sommerfeld の radiation condition⁷⁾ を満足する式 (2.6) の特解を Green 関数として、 f_1 に対しては $-iH_0^{(1)}(kr)/2$ 、 $f_2^{(n)}$ に対して $-K_0(k_n r)/\pi$ を取ると、Green の定理によって、外域の任意点 (x, y) における f_1 および $f_2^{(n)}$ の値 $f_1(x, y)$ および $f_2^{(n)}(x, y)$ はそれぞれ境界線 D 上の値 $f_1(\xi, \eta)$ と $f_2^{(n)}(\xi, \eta)$ および D に対する法線方向の勾配 $\partial f_1(\xi, \eta)/\partial \nu$ と $\partial f_2^{(n)}(\xi, \eta)/\partial \nu$ によって次のように表わされる⁸⁾。

$$\begin{aligned} f_1(x, y) = & -\frac{1}{2} \int_D \left[f_1(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(-\frac{i}{2} H_0^{(1)}(kr) \right) \right. \\ & \left. - \left(-\frac{i}{2} k H_0^{(1)}(kr) \right) \cdot \bar{f}_1(\xi, \eta) \right] ds \quad (2.10) \end{aligned}$$

注) 式 (2.7), (2.8) および (3.1) は文献 4) における式 (2) (13a) において time factor $e^{i\sigma t}$ を $e^{-i\sigma t}$ と書き換えれば容易に求められる。

$$f_2^{(m)}(x, y) = -\frac{1}{2} \int_D \left[f_2^{(m)}(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(-\frac{K_0(k_n r)}{\pi} \right) - \left(-\frac{kK_0(k_n r)}{\pi} \right) \bar{f}_2^{(m)}(\xi, \eta) \right] ds \quad (2.11)$$

ここで

$$\bar{f}_1(\xi, \eta) = \frac{\partial f_1(\xi, \eta)}{k \partial \nu}, \quad \bar{f}_2^{(m)}(\xi, \eta) = \frac{\partial f_2^{(m)}(\xi, \eta)}{k \partial \nu} \quad (2.12)$$

$H_0^{(1)}(kr)$ は 0 次の第 1 種 Hankel 関数, $K_0(k_n r)$ は 0 次の変形 Bessel 関数を表わし, ν は境界線 D における外向き法線で, 積分は D に沿って反時計回りの線積分を行うものとする。

式 (2.11), (2.12) において, 点 (x, y) を D 上の特定点 (ξ', η') に接近せしめる極限を考えると, $H_0^{(1)}(kr)$ と $K_0(k_n r)$ の特異性から, D 上の f_1 と \bar{f}_1 および $f_2^{(m)}$ と $\bar{f}_2^{(m)}$ に関する次の積分方程式を得る。

$$f_1(\xi', \eta') = -\int_D \left[f_1(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(-\frac{i}{2} H_0^{(1)}(kR) \right) - \left(-\frac{i}{2} k H_0^{(1)}(kR) \right) \cdot \bar{f}_1(\xi, \eta) \right] ds \quad (2.13)$$

$$f_2^{(m)}(\xi', \eta') = -\int_D \left[f_2^{(m)}(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(-\frac{K_0(k_n R)}{\pi} \right) - \left(-\frac{k K_0(k_n R)}{\pi} \right) \cdot \bar{f}_2^{(m)}(\xi, \eta) \right] ds \quad (2.14)$$

ここで

$$R = \sqrt{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2} \quad (2.15)$$

同様にして, 内域 II の任意点 (x, y) における $f_3^{(s)}$ (x, y) は, D 上の値 $f_3^{(s)}(\xi, \eta)$ と $\bar{f}_3^{(s)}(\xi, \eta) = \partial f_3^{(s)}(\xi, \eta) / k \partial \nu$ により次のように表わされる。

$$f_3^{(s)}(x, y) = \frac{1}{2} \int_D \left[f_3^{(s)}(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(-\frac{i}{2} H_0^{(1)}(\bar{k}_s r) \right) - \left(-\frac{i}{2} k H_0^{(1)}(\bar{k}_s r) \right) \cdot \bar{f}_3^{(s)}(\xi, \eta) \right] ds \quad (2.16)$$

また, 式 (2.13), (2.14) に対応する次の積分方程式を得る。

$$f_3^{(s)}(\xi', \eta') = \int_D \left[f_3^{(s)}(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(-\frac{i}{2} H_0^{(1)}(\bar{k}_s R) \right) - \left(-\frac{i}{2} k H_0^{(1)}(\bar{k}_s R) \right) \cdot \bar{f}_3^{(s)}(\xi, \eta) \right] ds \quad (2.17)$$

(4) 境界線 D における力学的条件

堤体側面上の任意点 (ξ, η, z) においては, 外域 I と内域 II の流体運動による質量流束とエネルギー流束の連続性が成り立たねばならない。前者は側面への法線方向の流速の連続, 後者は側面上の流体圧力強度の連続性により満足される。しかるに外域および内域の流体圧力

p_1 および p_2 は, それぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_1}{\rho} &= i \sigma \phi_1(x, y, z) \cdot e^{-i \sigma t} \\ \frac{p_2}{\rho} &= i \sigma \frac{1+i \mu V/\sigma}{V} \cdot \phi_2(x, y, z) e^{-i \sigma t} \end{aligned} \right\} \dots (2.18)$$

ゆえに上記の連続条件は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi_1(\xi, \eta, z)}{\partial \nu} &= \frac{\partial \phi_2(\xi, \eta, z)}{\partial \nu} \\ \phi_1(\xi, \eta, z) &= \frac{1+i \mu V/\sigma}{V} \cdot \phi_2(\xi, \eta, z) \end{aligned} \right\} \dots (2.19)$$

上式に式 (2.2), (2.7) を用いると次の関係式を得る。

$$\begin{aligned} & (\bar{f}_3^{(s)}(\xi, \eta) + \bar{f}_1(\xi, \eta)) \frac{\cosh k(x+h)}{\cosh kh} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}_2^{(m)}(\xi, \eta) \frac{\cos k_n(x+h)}{\cos k_n h} \\ & = \sum_{s=1}^{\infty} \bar{f}_3^{(s)}(\xi, \eta) \frac{\cosh \bar{k}_s(x+h)}{\cosh \bar{k}_s h} \quad \dots (2.20) \\ & (f_0(\xi, \eta) + f_1(\xi, \eta)) \frac{\cosh k(x+h)}{\cosh kh} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} f_2^{(m)}(\xi, \eta) \frac{\cos k_n(x+h)}{\cos k_n h} \\ & = \frac{1+i \mu V/\sigma}{V} \cdot \sum_{s=1}^{\infty} f_3^{(s)}(\xi, \eta) \frac{\cosh \bar{k}_s(x+h)}{\cosh \bar{k}_s h} \quad \dots (2.21) \end{aligned}$$

$\cosh k(x+h)$, $\cos k_n(x+h)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) が $0 \geq z \geq -h$ において完全直交関数系をなすことにより, 上式各項に $\cosh k(x+h)$ または $\cos k_n(x+h)$ を乗じて, $z=-h \sim 0$ において積分すると D 上の $f_1, f_2^{(m)}$ および $\bar{f}_1, \bar{f}_2^{(m)}$ を $f_3^{(s)}$ および $\bar{f}_3^{(s)}$ で表わす次の関係式を得る。

$$\left. \begin{aligned} f_1(\xi, \eta) &= - \left[f_0(\xi, \eta) + \frac{\alpha}{N_0} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{f_3^{(s)}(\xi, \eta)}{1 - (\bar{\lambda}_s/\lambda_0)^2} \right] \\ f_2^{(m)}(\xi, \eta) &= - \frac{\alpha}{N_n} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{f_3^{(s)}(\xi, \eta)}{1 + (\bar{\lambda}_s/\lambda_n)^2} \\ \bar{f}_1(\xi, \eta) &= - \left[\bar{f}_0(\xi, \eta) + \frac{\beta}{N_0} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\bar{f}_3^{(s)}(\xi, \eta)}{1 - (\bar{\lambda}_s/\lambda_0)^2} \right] \\ \bar{f}_2^{(m)}(\xi, \eta) &= - \frac{\beta}{N_n} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\bar{f}_3^{(s)}(\xi, \eta)}{1 + (\bar{\lambda}_s/\lambda_n)^2} \end{aligned} \right\} \dots (2.22)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= i \frac{\mu}{\sigma} \left(1 + i \frac{\mu V}{\sigma} \right), \quad \beta = i \frac{\mu V}{\sigma}, \\ \lambda_0 &= kh, \quad \lambda_n = k_n h, \quad \bar{\lambda}_s = \bar{k}_s h \\ N_0 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2 \lambda_0}{\sinh 2 \lambda_0} \right), \quad N_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2 \lambda_n}{\sin 2 \lambda_n} \right), \\ \bar{f}_3^{(s)}(\xi, \eta) &= \partial f_3^{(s)}(\xi, \eta) / k \partial \nu \end{aligned} \right\} \dots (2.23)$$

(5) 境界線 D 上の f_1, \bar{f}_1, \dots etc. の決定

式 (2.22) を式 (2.13), (2.14) に代入すると, $f_3^{(s)}$

と $\bar{f}_3^{(s)}$ に関する次の関係式となる。

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{1 - (\bar{\lambda}_s/\lambda_0)^2} \left[\alpha f_3^{(s)}(\xi', \eta') \right. \\ & \quad + \int_D \left\{ \alpha f_3^{(s)}(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(-\frac{i}{2} H_0^{(1)}(kR) \right) \right. \\ & \quad \left. - \beta \left(-\frac{i}{2} k H_0^{(1)}(kR) \right) \cdot \bar{f}_3^{(s)}(\xi, \eta) \right\} ds \Big] \\ & = -N_0 \left[f_0(\xi', \eta') + \int_D \left\{ f_0(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \nu} \right. \right. \\ & \quad \cdot \left(-\frac{i}{2} H_0^{(1)}(kR) \right) - \left(-\frac{i}{2} k H_0^{(1)}(kR) \right) \\ & \quad \left. \cdot \bar{f}_0(\xi, \eta) \right\} ds \Big] \\ & \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{1 + (\bar{\lambda}_s/\lambda_0)^2} \left[\alpha f_3^{(s)}(\xi', \eta') \right. \\ & \quad + \int_D \left\{ \alpha f_3^{(s)}(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(-\frac{1}{\pi} K_0(k_n R) \right) \right. \\ & \quad \left. - \beta \left(-\frac{k}{\pi} K_0(k_n R) \right) \cdot \bar{f}_3^{(s)}(\xi, \eta) \right\} ds \Big] \\ & = 0, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.24)$$

式 (2.24) は式 (2.17) とともに境界線 D 上の f_3 および \bar{f}_3 を決定すべき積分方程式である。これらから

$$f_3^{(s)}(\xi_i, \eta_i) - \sum_{j=1}^N \{ \bar{A}_{ij}^{(s)} f_3^{(s)}(\xi_j, \eta_j) - A_{ij}^{(s)} \bar{f}_3^{(s)}(\xi_j, \eta_j) \} = 0, \quad (s=1, 2, 3, \dots) \dots\dots\dots (2.25)$$

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{1 - (\bar{\lambda}_s/\lambda_0)^2} \left[\alpha f_3^{(s)}(\xi_i, \eta_i) + \sum_{j=1}^N \{ \alpha \bar{A}_{ij} f_3^{(s)}(\xi_j, \eta_j) - \beta A_{ij} \bar{f}_3^{(s)}(\xi_j, \eta_j) \} \right] \\ & = -N_0 \left[f_0(\xi_i, \eta_i) + \sum_{j=1}^N \{ \bar{A}_{ij} f_0(\xi_j, \eta_j) - A_{ij} \bar{f}_0(\xi_j, \eta_j) \} \right] \\ & \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{1 + (\bar{\lambda}_s/\lambda_0)^2} \left[\alpha f_3^{(s)}(\xi_i, \eta_i) + \sum_{j=1}^N \{ \alpha \bar{C}_{ij}^{(m)} f_3^{(s)}(\xi_j, \eta_j) - \beta C_{ij}^{(m)} \bar{f}_3^{(s)}(\xi_j, \eta_j) \} \right] = 0, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.26)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} A_{ij} &= \int_{ds_j} \left(-\frac{i}{2} H_0^{(1)}(kR_{ij}) \right) k ds, & \bar{A}_{ij} &= \int_{ds_j} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(-\frac{i}{2} H_0^{(1)}(kR_{ij}) \right) ds \\ A_{ij}^{(s)} &= \int_{ds_j} \left(-\frac{i}{2} H_0^{(1)}(\bar{k}_s R_{ij}) \right) k ds, & \bar{A}_{ij}^{(s)} &= \int_{ds_j} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(-\frac{i}{2} H_0^{(1)}(\bar{k}_s R_{ij}) \right) ds \\ C_{ij}^{(m)} &= \int_{ds_j} \left(-\frac{1}{\pi} K_0(k_n R_{ij}) \right) k ds, & \bar{C}_{ij}^{(m)} &= \int_{ds_j} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(-\frac{1}{\pi} K_0(k_n R_{ij}) \right) ds \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.27)$$

式 (2.25) は次のように書き直される。

$$\sum_{j=1}^N A_{ij}^{(s)} \bar{f}_3^{(s)}(\xi_j, \eta_j) = \sum_{j=1}^N r_{ij}^{(s)} f_3^{(s)}(\xi_j, \eta_j), \quad r_{ij}^{(s)} = \delta_{ij} + \bar{A}_{ij}^{(s)} \dots\dots\dots (2.28)$$

ここで δ_{ij} は Kronecker の delta で $\delta_{ij}=0, \delta_{ii}=1$ である。上式から $\bar{f}_3^{(s)}$ は $f_3^{(s)}$ の一次式で次のように表わされる。

$$\bar{f}_3^{(s)}(\xi_i, \eta_i) = \sum_{j=1}^N M_{ij}^{(s)} f_3^{(s)}(\xi_j, \eta_j), \quad M_{ij}^{(s)} = \frac{1}{d^{(s)}} \sum_{k=1}^N r_{kj}^{(s)} \cdot d_{ki}^{(s)} \dots\dots\dots (2.29)$$

ここで $d^{(s)}$ は $A_{ij}^{(s)}$ により作られる行列式で、 $d_{ki}^{(s)}$ はその行列式から第 k 行第 i 列をのぞいた小行列式に $(-1)^{k+i}$ を乗じた余因子を表わす。

式 (2.29) を式 (2.26) に代入すると $f_3^{(s)}$ のみに関する次の連立方程式となる。

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{1 - (\bar{\lambda}_s/\lambda_0)^2} \left[\alpha f_3^{(s)}(\xi_i, \eta_i) + \sum_{j=1}^N \{ \alpha \bar{A}_{ij} f_3^{(s)}(\xi_j, \eta_j) - \beta A_{ij} \sum_{k=1}^N M_{jk}^{(s)} f_3^{(s)}(\xi_k, \eta_k) \} \right] \\ & = -N_0 \left[f_0(\xi_i, \eta_i) + \sum_{j=1}^N \{ \bar{A}_{ij} f_0(\xi_j, \eta_j) - A_{ij} \bar{f}_0(\xi_j, \eta_j) \} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.30)$$

f_3 と \bar{f}_3 が決定されると式 (2.22) により D 上の f_1, \bar{f}_1 および $f_2^{(m)}, \bar{f}_2^{(m)}$ が決まることとなり、任意点 (x, y) における $f_1(x, y), f_2^{(m)}(x, y)$ および $f_3^{(s)}(x, y)$ はそれぞれ式 (2.10), (2.11) および (2.16) により計算され、速度ポテンシャル $\phi_1(x, y, z)$ および $\phi_2(x, y, z)$ は式 (2.2), (2.7) により確定することになる。

(6) 積分方程式の数値計算法

任意の形の境界線 D に対しては積分方程式 (2.17), (2.24) を数値的に解かねばならない。そこで境界線 D を N 個の点によって N 個の短い線分 dS に分け、おのおのの midpoint の座標 (ξ_j, η_j) ($j=1, 2, 3, \dots, N$) によって線分 dS_j 上の $f_3^{(s)}$ および $\bar{f}_3^{(s)}$ の値を代表させることができるようにする。するとたとえば特定の点 (ξ_i, η_i) については $R_{ij} = \sqrt{(\xi_j - \xi_i)^2 + (\eta_j - \eta_i)^2}$ とすると

$$\int_D f_3^{(s)}(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(-\frac{i}{2} H_0^{(1)}(kR) \right) ds = \sum_{j=1}^N f_3^{(s)}(\xi_j, \eta_j) \cdot \int_{ds_j} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(-\frac{i}{2} H_0^{(1)}(kR_{ij}) \right) ds$$

とおくことができ、式 (2.17), (2.24) はそれぞれ次のように和の形で表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{1 + (\lambda_s/l_n)^2} [\alpha f_3^{(s)}(\xi_j, \eta_j) + \sum_{j=1}^N (\alpha \bar{C}_{ij}^{(s)} f_3^{(s)}(\xi_j, \eta_j) - \beta C_{ij}^{(s)} \sum_{k=1}^N M_{jk}^{(s)} f_3^{(s)}(\xi_k, \eta_k))] \\ = 0, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\}$$

式 (2.30) は $i=1, 2, 3, \dots, N$ のおのおのについて成立する $f_3^{(s)}(\xi_j, \eta_j)$ に関する連立一次方程式であり, n および s に関する項をそれぞれ第 n^* 項および第 s^* 項まで取るときは, 未知数 $f_3^{(s)}$ は s^*N 個で, これに対して方程式は $(n^*+1) \cdot N$ 個であるから, $s^*=n^*+1$ と取れば, $i=1, 2, 3, \dots, N$ に対するすべての $f_3^{(s)}$ の値が決まる。すると式 (2.29) により $\bar{f}_3^{(s)}$, また式 (2.22) により f_1, \bar{f}_1 および $f_2^{(m)}, \bar{f}_2^{(m)}$ が順次決定する。

かくして境界線 D 上の値がすべて決まると, 外域と内域の任意点 (x, y) における $f_1, f_2^{(m)}$ および $f_3^{(s)}$ は式 (2.10), (2.11) および式 (2.16) により次のように計算され, 速度ポテンシャルが決まることになる。

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y) &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N [\bar{A}_{Xj} f_1(\xi_j, \eta_j) - A_{Xj} \bar{f}_1(\xi_j, \eta_j)] \\ f_2^{(m)}(x, y) &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N [\bar{C}_{Xj}^{(m)} f_2^{(m)}(\xi_j, \eta_j) \\ &\quad - C_{Xj}^{(m)} \bar{f}_2^{(m)}(\xi_j, \eta_j)] \\ f_3^{(s)}(x, y) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N [\bar{A}_{Xj}^{(s)} f_3^{(s)}(\xi_j, \eta_j) \\ &\quad - A_{Xj}^{(s)} \bar{f}_3^{(s)}(\xi_j, \eta_j)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.31)$$

ここで $A_{Xj}, \bar{A}_{Xj} \dots$ etc. は $A_{ij}, \bar{A}_{ij} \dots$ etc. において (ξ_i, η_i) の代りに (x, y) とおいた値を表わすものである。

なお, 式 (2.27) の各項は次のように計算される¹⁰⁾。
すなわち

$$\left. \begin{aligned} R_{ij} &= \sqrt{(\xi_j - \xi_i)^2 + (\eta_j - \eta_i)^2}, \\ \Delta s_j &= \sqrt{(\Delta \xi_j)^2 + (\Delta \eta_j)^2} \\ \Delta \xi_j &= (\xi_{j+1} - \xi_{j-1})/2, \quad \Delta \eta_j = (\eta_{j+1} - \eta_{j-1})/2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.32)$$

また, $kr \rightarrow 0$ においては

$$\left. \begin{aligned} H_0^{(1)}(kr) &\approx 1 + i \frac{2}{\pi} \left(\log \frac{kr}{2} + \gamma \right), \\ H_0^{(1)}(\bar{k}_s r) &\approx 1 + i \frac{2}{\pi} \left(\log \frac{\bar{k}_s r}{2} + \gamma \right) \\ K_0(k_n r) &\approx - \left(\gamma + \log \frac{k_n r}{2} \right), \\ \gamma &= 0.577216 \dots \quad (\text{Euler の定数}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.33)$$

ゆえに Δs_j が十分小さく, $j \neq i$ のときは

$$A_{ij} = -\frac{i}{2} H_0^{(1)}(kR_{ij}) \cdot k \Delta s_j, \quad (j \neq i) \dots (2.34)$$

$j=i$ のときは $kR_{ij} \rightarrow 0$ であるから式 (2.33) により, Δs_i 上の平均値をとり,

$$\begin{aligned} A_{ii} &= \left[\frac{1}{\Delta s_i/2} \int_0^{\Delta s_i/2} \left\{ 1 + i \frac{2}{\pi} \left(\log \frac{kr}{2} + \gamma \right) \right\} dr \right] \cdot k \Delta s_i \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\gamma - 1 + \log \frac{k \Delta s_i}{4} - i \frac{\pi}{2} \right) \cdot k \Delta s_i \dots\dots\dots (2.35) \end{aligned}$$

また, $j \neq i$ のとき $\partial(H_0^{(1)}(kr))/\partial r = -kH_1^{(1)}(kr)$ であるから,

$$\begin{aligned} \bar{A}_{ij} &= \frac{\partial}{\partial \nu} \left(-\frac{i}{2} H_0^{(1)}(kR_{ij}) \right) \cdot \Delta s_j \\ &= \frac{i}{2} k H_1^{(1)}(kR_{ij}) \cdot \frac{\partial R_{ij}}{\partial \nu} \cdot \Delta s_j \end{aligned}$$

しかるに

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial R_{ij}}{\partial \nu} \right)_j &= \frac{\partial R_{ij}}{\partial \xi_j} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \nu} \right)_j + \frac{\partial R_{ij}}{\partial \eta_j} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \nu} \right)_j \\ &= \frac{\partial R_{ij}}{\partial \xi_j} \left(\frac{\partial \eta}{\partial s} \right)_j - \frac{\partial R_{ij}}{\partial \eta_j} \left(\frac{\partial \xi}{\partial s} \right)_j \\ &\approx \frac{\xi_j - \xi_i}{R_{ij}} \left(\frac{\Delta \eta}{\Delta s} \right)_j - \frac{\eta_j - \eta_i}{R_{ij}} \left(\frac{\Delta \xi}{\Delta s} \right)_j \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \bar{A}_{ij} &= \frac{i}{2} H_1^{(1)}(kR_{ij}) \cdot \left(\frac{\xi_j - \xi_i}{R_{ij}} k \Delta \eta_j \right. \\ &\quad \left. - \frac{\eta_j - \eta_i}{R_{ij}} k \Delta \xi_j \right), \quad (j \neq i) \dots\dots\dots (2.36) \end{aligned}$$

$j=i$ のときは, $kr \rightarrow 0$ で $H_1^{(1)}(kr) \rightarrow -i \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{kr}$ であるから

$$\begin{aligned} \bar{A}_{ii} &= -\frac{i}{2} \lim_{r \rightarrow 0} \left(-k H_1^{(1)}(kr) \cdot \frac{\partial r}{\partial \nu} \right) \cdot \Delta s_i \\ &= \frac{1}{\pi} \Delta s_i \cdot \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial r}{r \partial \nu} \end{aligned}$$

しかるに

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \nu} &= \frac{\xi - \xi_i}{r} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial s} - \frac{\eta - \eta_i}{r} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial s} \\ &\approx \frac{\xi - \xi_i}{r} \cdot \frac{\Delta \eta}{\Delta s} - \frac{\eta - \eta_i}{r} \cdot \frac{\Delta \xi}{\Delta s} \\ r &= \sqrt{(\xi - \xi_i)^2 + (\eta - \eta_i)^2} \end{aligned}$$

の関係を用い, $\xi - \xi_i, \eta - \eta_i, \Delta \eta/\Delta s, \Delta \xi/\Delta s$ を Δs について Taylor 展開を行い, $r \rightarrow 0$ を $\Delta s \rightarrow 0$ におきかえると

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial r}{r \partial \nu} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\partial r}{r \partial \nu} = \frac{1}{2} (\xi_s \eta_{ss} - \xi_{ss} \eta_s)$$

ゆえに

$$\bar{A}_{ii} = \frac{1}{2\pi} (\xi_s \eta_{ss} - \xi_{ss} \eta_s)_i \cdot \Delta s_i \dots\dots\dots (2.37)$$

ここで

$$\xi_s = \frac{\Delta \xi}{\Delta s} = \frac{\xi_{i+1} - \xi_{i-1}}{2 \Delta s_i},$$

$$\xi_{ss} = \frac{6}{\Delta s_{i+1} + \Delta s_i + \Delta s_{i-1}} \left[\frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{\Delta s_{i+1} + \Delta s_i} - \frac{\xi_i - \xi_{i-1}}{\Delta s_i + \Delta s_{i-1}} \right]$$

$$\eta_s = \frac{\Delta \eta}{\Delta s} = \frac{\eta_{i+1} - \eta_{i-1}}{2 \Delta s_i},$$

$$\eta_{ss} = \frac{6}{\Delta s_{i+1} + \Delta s_i + \Delta s_{i-1}} \left[\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{\Delta s_{i+1} + \Delta s_i} - \frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{\Delta s_i + \Delta s_{i-1}} \right]$$

同様に, $C_{ij}^{(m)}, \bar{A}_{ij}^{(s)}$ etc. も次のように計算さ

れる。

$$\left. \begin{aligned} C_{ij}^{(m)} &= -\frac{1}{\pi} K_0(k_n R_{ij}) \cdot k \, d \, s_j \\ C_{ii}^{(m)} &= \frac{1}{\pi} \left(\gamma - 1 + \log \frac{k_n d s_i}{4} \right) \cdot k \, d \, s_i \\ \bar{C}_{ij}^{(m)} &= \frac{1}{\pi} K_1(k_n R_{ij}) \\ &\quad \cdot \left(\frac{\xi_j - \xi_i}{R_{ij}} k_n d \, \eta_j - \frac{\eta_j - \eta_i}{R_{ij}} \cdot k_n d \, \xi_j \right) \\ \bar{C}_{ii}^{(m)} &= \frac{1}{2\pi} (\xi_s \eta_{ss} - \xi_{ss} \eta_s) \cdot d \, s_i \\ &\quad \dots\dots\dots(2.38) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} A_{ij}^{(s)} &= -\frac{i}{2} H_0^{(1)}(\bar{k}_s R_{ij}) \cdot k \, d \, s_j \\ A_{ii}^{(s)} &= \frac{1}{\pi} \left(\gamma - 1 + \log \frac{\bar{k}_s d s_i}{4} - i \frac{\pi}{2} \right) \cdot k \, d \, s_i \\ \bar{A}_{ij}^{(s)} &= \frac{i}{2} H_1^{(1)}(\bar{k}_s R_{ij}) \\ &\quad \cdot \left(\frac{\xi_j - \xi_i}{R_{ij}} \bar{k}_s d \, \eta_j - \frac{\eta_j - \eta_i}{R_{ij}} \bar{k}_s d \, \xi_j \right) \\ \bar{A}_{ii}^{(s)} &= \frac{1}{2\pi} (\xi_s \eta_{ss} - \xi_{ss} \eta_s) \cdot d \, s_i \\ &\quad \dots\dots\dots(2.39) \end{aligned} \right\}$$

また、式(2.5)により、 f_0 および \bar{f}_0 は次のように計算される。

$$\left. \begin{aligned} f_0(\xi_j, \eta_j) &= -ie^{-i(k_j \cos \omega + k_j \eta_j \sin \omega)} \\ \bar{f}_0(\xi_j, \eta_j) &= \frac{d \, \xi_j \sin \omega - d \, \eta_j \cos \omega}{d \, s_j} \cdot e^{-i(k_j \cos \omega + k_j \eta_j \sin \omega)} \\ &\quad \dots\dots\dots(2.40) \end{aligned} \right\}$$

(7) 波高の分布および堤体に作用する流体力

外域および内域の任意点における水面波形はそれぞれ次式によって与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1 &= i \zeta_0 \phi_1(x, y, 0) \cdot e^{-i\omega t}, \\ \zeta_2 &= i \zeta_0 \frac{1+i\mu V/\sigma}{V} \phi_2(x, y, 0) \cdot e^{-i\omega t} \end{aligned} \right\} \dots(2.41)$$

したがって、各点での回折係数(各点での波の振幅と入射波の振幅の比)を $K_d^{(1)}$ および $K_d^{(2)}$ とすると

$$\left. \begin{aligned} K_d^{(1)} &= \left| f_0(x, y) + f_1(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} f_2^{(n)}(x, y) \right| \\ K_d^{(2)} &= \left| \frac{1+i\mu V/\sigma}{V} \sum_{s=1}^{\infty} f_3^{(s)}(x, y) \right| \dots\dots\dots(2.42) \end{aligned} \right\}$$

堤体に作用する x および y の正方向への流体圧力の合力 F_x, F_y は次式により計算される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{F_x}{\rho g \zeta_0 h^2} &= -ie^{-i\omega t} \cdot \frac{\sigma^2 h}{g} \cdot \frac{(1+i\mu V/\sigma)^2}{V} \\ &\quad \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^N \frac{f_3^{(s)}(\xi_j, \eta_j)}{\lambda_0(\bar{\lambda}_s)^2} \cdot k \, d \, \eta_j \\ \frac{F_y}{\rho g \zeta_0 h^2} &= ie^{-i\omega t} \cdot \frac{\sigma^2 h}{g} \cdot \frac{(1+i\mu V/\sigma)^2}{V} \\ &\quad \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^N \frac{f_3^{(s)}(\xi_j, \eta_j)}{\lambda_0(\bar{\lambda}_s)^2} \cdot k \, d \, \xi_j \\ &\quad \dots\dots\dots(2.43) \end{aligned} \right\}$$

(8) 級数の収束

式(2.2), (2.7)の右辺がそれぞれ $\phi_1(x, y, z)$, $\phi_2(x, y, z)$ を表すためにはそれぞれの級数が (x, y, z) について一様収束でなければならない。これを厳密に証明することは困難であるが、以下のようにして推定される。たとえば、式(2.2)について考えると n の大きい値に対しては

$$k_n h \approx n \pi - \frac{1}{n \pi} \cdot \frac{\sigma^2 h}{g}$$

したがって

$$\begin{aligned} \sum_n f_2^{(n)}(x, y) &\frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h} \\ &\approx \sum_n f_2^{(n)}(x, y) \cos k_n z \dots\dots\dots(2.44) \end{aligned}$$

上式右辺の級数は $\sum f_2^{(n)}(x, y)$ が収束であれば、 $0 \geq z \geq -h$ において収束する。しかるに式(2.31)の第2式で $\{C_{Xj}^{(m)}, \{\bar{C}_{Xj}^{(m)}\}$ はすべての (x, y) において n の増加とともに単調減少であるから $\sum f_2^{(n)}(\xi, \eta)$, $\sum \bar{f}_2^{(n)}(\xi, \eta)$ が収束であれば $\sum f_2^{(n)}(x, y)$ は収束である。

一方、 n および s の大きい値に対しては

$$\begin{aligned} N_n &\approx -\frac{(n\pi)^2}{2\sigma^2 h/g} \\ \bar{\lambda}_s &\approx \frac{\sigma^2 h}{g} \cdot \frac{V\mu}{\sigma} \cdot \frac{1}{s\pi} + i \left(s\pi - \frac{1}{s\pi} \frac{\sigma^2 h}{g} \right) \dots(2.45) \end{aligned}$$

であるから、式(2.22)において

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_n \{1 + (\bar{\lambda}_s/\lambda_n)^2\}} &\approx -\frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{\sigma^2 h}{g} \\ &\quad \cdot \frac{1}{n^2 - s^2 + 2i \frac{\sigma^2 h}{g} \cdot \frac{V\mu}{\sigma} \cdot \frac{1}{\pi^2}} \end{aligned}$$

また $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - s^2} = \frac{3}{4s^2}$ (ただし $n=s$ を除く)

したがって

$$\begin{aligned} \sum_n \sum_s \frac{\alpha f_3^{(s)}(\xi, \eta)}{N_n \{1 + (\bar{\lambda}_s/\lambda_n)^2\}} &\approx -\frac{\alpha}{\pi^2} \cdot \frac{\sigma^2 h}{g} \sum_s \\ &\quad \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{f_3^{(s)}(\xi, \eta)}{s^2} - i \frac{\pi^2 f_3^{(s)}(\xi, \eta)}{\sigma^2 h} \cdot \frac{V\mu}{\sigma} \right] \dots(2.46) \end{aligned}$$

この級数は $\sum_s f_3^{(s)}(\xi, \eta)$ が収束であれば収束するから、 $\sum_n f_2^{(n)}(\xi, \eta)$ は収束することになる。

さらに式(2.39)でわかるように、 s の大きい値に対しては、 $A_{ij}^{(s)} \ll A_{ii}^{(s)}$, $\bar{A}_{ij}^{(s)} \ll \bar{A}_{ii}^{(s)}$ であるから式(2.25)は次式に近似する。

$$(1 - \bar{A}_{ii}^{(s)}) \cdot f_3^{(s)}(\xi_i, \eta_i) + A_{ii}^{(s)} \bar{f}_3^{(s)}(\xi_i, \eta_i) = 0$$

ゆえに

$$\bar{f}_3^{(s)}(\xi_i, \eta_i) = -\frac{1 - \bar{A}_{ii}^{(s)}}{A_{ii}^{(s)}} f_3^{(s)}(\xi_i, \eta_i) \dots(2.47)$$

ここで $\bar{A}_{ii}^{(s)}$ は s に関係せず、 $A_{ii}^{(s)}$ は次のように

近似される。

$$A_{ii}^{(s)} \approx \frac{k d s_i}{\pi} \left\{ r - 1 + i \left(\frac{s \pi d s_i}{4 h} - \frac{\pi}{2} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots(2.48)$$

すなわち、 $A_{ii}^{(s)}$ は s とともに増加し $\sum_s f_3^{(s)}(\xi, \eta)$ が収束であれば $\sum_s \bar{f}_3^{(s)}(\xi, \eta)$ も明らかに収束である。

かくして $\sum_s f_3^{(s)}(\xi, \eta)$ の収束が保証されれば $\sum_s \bar{f}_3^{(s)}(\xi, \eta)$, $\sum_s f_2^{(s)}(\xi, \eta)$, $\sum_s \bar{f}_2^{(s)}(\xi, \eta)$ も収束し、また $f_1(\xi, \eta)$, $\bar{f}_1(\xi, \eta)$ も同様であることがわかる。

しかし、 $\sum_s f_3^{(s)}(\xi, \eta)$ の収束を理論的に示すことは困難で、数値計算の結果から推定され、Table 2 にその例を示している。

なお、実際計算においては、級数項はすべて有限項までで打切ることになるが、それによる誤差の影響は、任意の (ξ, η) に対する $f_1, \bar{f}_1, f_2^{(s)}, \bar{f}_2^{(s)}$ および $f_3^{(s)}, \bar{f}_3^{(s)}$ の計算値を式 (2.20) と (2.21) に代入し、種々の π に対する両辺の値を比較することにより容易に推定される。

3. 解析 II (不透過堤体の場合)

不透過堤体の場合は、流体域は外域 I だけとなり、その速度ポテンシャルは、式 (2.2) における散乱波項 $f_2^{(s)}$ (x, y) が消え、簡単に次のようになる。

$$\phi(x, y, z) = \frac{g \zeta_0}{\sigma} [f_0(x, y) + f_1(x, y)] \frac{\cosh k(x+h)}{\cosh kh} \quad \dots\dots\dots(3.1)$$

境界線 D においては、法線方向の流速は消えるから

$$\frac{\partial \phi(\xi, \eta, z)}{\partial \nu} = 0$$

したがって

$$\frac{\partial f_1(\xi, \eta)}{\partial \nu} = -\frac{\partial f_0(\xi, \eta)}{\partial \nu} \quad \dots\dots\dots(3.2)$$

この関係を式 (2.13) に代入し、次の関係式を得る。

$$\begin{aligned} f_1(\xi', \eta') + \int_D f_1(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(-\frac{i}{2} H_0^{(1)}(kR) \right) ds \\ = - \int_D \left(-\frac{i}{2} k H_0^{(1)}(kR) \right) \cdot \bar{f}_0(\xi, \eta) ds \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(3.3)$$

これが f_1 を決定すべき積分方程式である。

積分を和の形におきかえ、式 (2.27), (2.40) を用いると f_1 に関する次の連立一次方程式となる。

$$\begin{aligned} f_1(\xi_i, \eta_i) + \sum_{j=1}^N \bar{A}_{ij} f_1(\xi_j, \eta_j) \\ = \sum_{j=1}^N \frac{d\eta_j \cos \omega - d\xi_j \sin \omega}{d s_j} \cdot A_{ij} e^{-i(k\xi_j \cos \omega + k\eta_j \sin \omega)} \\ (i=1, 2, 3 \dots N) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(3.4)$$

これは f_1 なる N 個の未知数に対する N 個の連立方程式を与えるから、これを解いて $f_1(\xi_j, \eta_j)$ ($j=1, 2, 3 \dots N$) が求まると、式 (2.31) の第 1 式により、任意点 (x, y) における $f_1(x, y)$ が計算され、速度ポテンシャル式 (3.1) が決まる。

任意点 (x, y) での回折係数および堤体に対する圧力の合力は式 (2.42), (2.43) に対応して次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} K_d &= |f_0(x, y) + f_1(x, y)| \\ \frac{F_x}{\rho g \zeta_0 h^2} &= -ie^{-i\omega t} \cdot \frac{\sigma^2 h}{g} \cdot \frac{1}{\lambda_0^3} \sum_{j=1}^N \\ &\quad \cdot [f_0(\xi_j, \eta_j) + f_1(\xi_j, \eta_j)] \cdot k d \eta_j \\ \frac{F_y}{\rho g \zeta_0 h^2} &= ie^{-i\omega t} \cdot \frac{\sigma^2 h}{g} \cdot \frac{1}{\lambda_0^3} \sum_{j=1}^N \\ &\quad \cdot [f_0(\xi_j, \eta_j) + f_1(\xi_j, \eta_j)] \cdot k d \xi_j \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(3.5)$$

また、点 $(0, 0, z_0)$ を通り、 x, y, z 軸に平行な軸の回りの回転モーメント T_x, T_y, T_z は次式のように計算される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{T_x}{\rho g \zeta_0 h^3} &= -i \frac{e^{-i\omega t}}{\lambda_0^3} \\ &\quad \cdot Q_0 \sum_{j=1}^N [f_0(\xi_j, \eta_j) + f_1(\xi_j, \eta_j)] \cdot k d \xi_j \\ \frac{T_y}{\rho g \zeta_0 h^3} &= -i \frac{e^{-i\omega t}}{\lambda_0^3} \\ &\quad \cdot Q_0 \sum_{j=1}^N [f_0(\xi_j, \eta_j) + f_1(\xi_j, \eta_j)] \cdot k d \eta_j \\ \frac{T_z}{\rho g \zeta_0 h^3} &= ie^{-i\omega t} \frac{\sigma^2 h}{g} \cdot \frac{1}{\lambda_0^3} \sum_{j=1}^N [f_0(\xi_j, \eta_j) \\ &\quad + f_1(\xi_j, \eta_j)] \cdot k^2 (\xi_j d \xi_j + \eta_j d \eta_j) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(3.6)$$

4. 数値計算

ここでは計算例として、半径が b の円柱と y 軸半径を b とし x 軸半径 a が $0.5b$ であるような楕円柱および x, y 方向の辺の長さがそれぞれ $2a$ および $2b$ で a が $0.5b$ の矩形柱の堤体で $b/h=1.0$ とした場合について示すことにする。

(1) 計算点の間隔

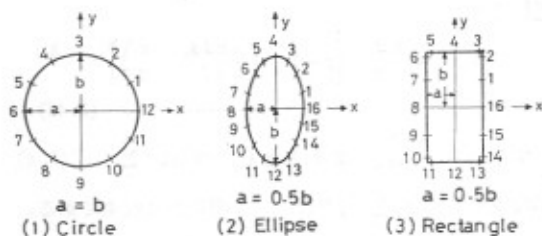
境界線 D 上の相隣る計算点の間隔は波長 L の $1/8$ 程度以下に取ることが望ましいとされている¹¹⁾。ここでは上記の条件の不透過円柱において、 $kh=k_b=\pi/4$ および $\pi/2$ の場合、計算点を円周上に等間隔に N 個取り、 N を 8, 16, 24 および 32 としたときの堤体に対する流体圧力の絶対値 $F_x/\rho g \zeta_0 h^2$ を式 (3.5) により計算した結果を示すと、Table 1 のようである。ここで $d s/L$ は相隣る計算点の直線距離と波長の比を表わしている。

Table 1 Horizontal Forces for Various N

kh	N	$\Delta s/L$	$F_{x/p} g \zeta_{ph}^2$
$\pi/4$	8	0.094	3.3087
	16	0.047	3.4067
	24	0.031	3.4303
	32	0.024	3.4401
$\pi/2$	8	0.188	2.2106
	16	0.094	2.2570
	24	0.062	2.2671
	32	0.048	2.2710

これによっても計算点間隔は 1/10 波長程度以下であれば十分で、1/5 波長程度でも実用上は差支えないと考えられる。そこで本論文の計算例では Fig. 2 に示すように、円の場合は中心角を 30° とし 12 点、楕円の場合は 30° および 15° の中心角で 16 点、矩形の場合は長辺の 1/4 点と短辺の 1/2 点および各頂点付近に 2 点（頂点からの距離を短辺の 1/10 とする）宛 合計 16 点を取ることとした。したがって、波長の短い $\sigma^2 h/g=1.0$ の場合でも最も大きい $\Delta s/L$ の値は 0.095 となり、1/10 波長以下である。

なお、矩形の頂点付近に 2 点を取ったのは、境界線が不連続にその方向を変える点では、式 (2.13), (2.14)



Distribution of Calculation Points

Fig. 2

および (2.17) が成り立たなくなるので、これを避けるために境界線を円滑な曲線で近似させるためである。

(2) 級数の収束性

級数の収束については 2. (8) に述べたとおりであるが、その収束性は $\sigma^2 h/g$ が小さいほど良くなることは、波長が長くなるほど式 (2.2) の散乱波項の影響が小さくなる¹²⁾ことから容易に推察される。そこで、前記の楕円形堤体において $\sigma^2 h/g=1.0$ の波が y 軸方向から入射する場合 ($\omega=90^\circ$ の場合) について、 $V=0.5$, $\mu V/\sigma=1.0$

Table 2 Successive values of F_1 , $F_2(n)$ and $F_3(s)$ for $\sigma^2 h/g=1.0$

j	F_1	$F_2(1)$	$F_2(2)$	$F_2(3)$
1	-0.3301 -0.3281 i	0.0370 -0.0431 i	0.0091 -0.0142 i	0.0029 -0.0070 i
2	-0.2900 -0.2925 i	0.0344 -0.0373 i	0.0092 -0.0124 i	0.0030 -0.0061 i
3	-0.2181 -0.2163 i	0.0291 -0.0281 i	0.0084 -0.0092 i	0.0023 -0.0039 i
4	-0.1326 -0.0882 i	0.0240 -0.0201 i	0.0077 -0.0064 i	0.0038 -0.0032 i
5	-0.0665 +0.0957 i	0.0235 -0.0150 i	0.0072 -0.0037 i	0.0033 -0.0012 i
6	-0.0400 +0.3131 i	0.0269 -0.0109 i	0.0080 -0.0021 i	0.0033 -0.0011 i
7	-0.0516 +0.5267 i	0.0299 -0.0055 i	0.0077 +0.0012 i	0.0008 +0.0042 i
8	-0.0739 +0.6623 i	0.0303 -0.0014 i	0.0068 +0.0029 i	0.0012 +0.0036 i
9	-0.0739 +0.6623 i	0.0303 -0.0014 i	0.0068 +0.0029 i	0.0012 +0.0036 i
10	-0.0516 +0.5267 i	0.0299 -0.0055 i	0.0077 +0.0012 i	0.0008 +0.0042 i
11	-0.0400 +0.3131 i	0.0269 -0.0109 i	0.0080 -0.0021 i	0.0033 -0.0011 i
12	-0.0665 +0.0957 i	0.0235 -0.0150 i	0.0072 -0.0037 i	0.0033 -0.0012 i
13	-0.1326 -0.0882 i	0.0240 -0.0201 i	0.0077 -0.0064 i	0.0038 -0.0032 i
14	-0.2181 -0.2163 i	0.0291 -0.0281 i	0.0084 -0.0092 i	0.0023 -0.0039 i
15	-0.2900 -0.2925 i	0.0344 -0.0373 i	0.0092 -0.0124 i	0.0030 -0.0061 i
16	-0.3301 -0.3281 i	0.0370 -0.0431 i	0.0091 -0.0142 i	0.0029 -0.0070 i
j	$F_3(1)$	$F_3(2)$	$F_3(3)$	$F_3(4)$
1	-0.4636 -0.2596 i	-0.0348 +0.1026 i	-0.0068 +0.0210 i	-0.0032 +0.0093 i
2	-0.4264 -0.2803 i	-0.0409 +0.0974 i	-0.0078 +0.0200 i	-0.0035 +0.0089 i
3	-0.3508 -0.3100 i	-0.0513 +0.0854 i	-0.0097 +0.0178 i	-0.0044 +0.0083 i
4	-0.2401 -0.3266 i	-0.0609 +0.0640 i	-0.0117 +0.0173 i	-0.0049 +0.0059 i
5	-0.1126 -0.3084 i	-0.0632 +0.0347 i	-0.0125 +0.0080 i	-0.0052 +0.0037 i
6	0.0059 -0.2531 i	-0.0555 +0.0038 i	-0.0113 +0.0015 i	-0.0051 +0.0008 i
7	0.0935 -0.1786 i	-0.0413 -0.0206 i	-0.0086 -0.0032 i	-0.0035 +0.0002 i
8	0.1381 -0.1251 i	-0.0303 -0.0332 i	-0.0066 -0.0058 i	-0.0028 -0.0014 i
9	0.1381 -0.1251 i	-0.0303 -0.0332 i	-0.0066 -0.0058 i	-0.0028 -0.0014 i
10	0.0935 -0.1786 i	-0.0413 -0.0206 i	-0.0086 -0.0032 i	-0.0035 +0.0002 i
11	0.0059 -0.2531 i	-0.0555 +0.0038 i	-0.0113 +0.0015 i	-0.0051 +0.0008 i
12	-0.1126 -0.3084 i	-0.0632 +0.0347 i	-0.0125 +0.0080 i	-0.0052 +0.0037 i
13	-0.2401 -0.3266 i	-0.0609 +0.0640 i	-0.0117 +0.0173 i	-0.0049 +0.0059 i
14	-0.3508 -0.3100 i	-0.0513 +0.0854 i	-0.0097 +0.0178 i	-0.0044 +0.0083 i
15	-0.4264 -0.2803 i	-0.0409 +0.0974 i	-0.0078 +0.0200 i	-0.0035 +0.0089 i
16	-0.4636 -0.2596 i	-0.0348 +0.1026 i	-0.0068 +0.0210 i	-0.0032 +0.0093 i

として、式(2.30)を n については3まで、 s については4まで取って計算し、各計算点における $f_1, f_2^{(1)}, f_2^{(2)}, f_2^{(3)}$ および $f_3^{(1)}, f_3^{(2)}, f_3^{(3)}, f_3^{(4)}$ を示すとTable 2のようである。これによってわかるように級数項の収束は良好で、 $\sigma^2 h/g < 1.0$ の波では n については1または2まで、 s については2または3まで取れば十分であることがわかる。

これら級数項における第2項以下の影響は境界線から離れるほど急速に減少するから、波高分布の計算には n を1、 s を2まで取れば十分である。

(3) 計算値の精度

級数項を有限項に止めたための計算誤差の程度は、条件式(2.20)、(2.21)が満足される程度により容易に判定される。たとえば、楕円堤体において $\sigma^2 h/g=0.5$ の場合 n を1、 s を2までとしたときの短軸の2点($j=16$ および8)における $\omega=0^\circ$ のときの $f_1, f_1^{(1)}$ および $f_3^{(1)}, f_3^{(2)}$ とそれらの勾配値を式(2.20)、(2.21)に代入し、 $z/h=0, -0.2, \dots, -1.0$ に対する左右両辺の数値を計算した例を示すと、Table 3のようである。これによってわかるように両辺の一致の程度は良好である。

以上述べた所により、前述の円、楕円および矩形の堤体について $\sigma^2 h/g=0.25, 0.50$ および 1.0 、 $\omega=0^\circ, 45^\circ$ および 90° の場合の透過および不透透堤について式(2.42)、

Table 3 Numerical check on the boundary conditions

(i) Continuity of fluid pressure

j	z/h	Region I			Region II		
16	0.0	-1.0242	-0.9532 i	1.3992	-0.9585	-1.0181 i	1.3983
	-0.2	-0.9357	-0.8642 i	1.2738	-0.9433	-0.8574 i	1.2747
	-0.4	-0.8727	-0.7888 i	1.1764	-0.8977	-0.7631 i	1.1782
	-0.6	-0.8315	-0.7301 i	1.1066	-0.8428	-0.7180 i	1.1072
	-0.8	-0.8085	-0.6925 i	1.0645	-0.7996	-0.7017 i	1.0638
	-1.0	-0.8012	-0.6795 i	1.0505	-0.7833	-0.6983 i	1.0494
8	0.0	0.6938	-0.1931 i	0.7202	0.7047	-0.1467 i	0.7198
	-0.2	0.6297	-0.1769 i	0.6541	0.6288	-0.1821 i	0.6546
	-0.4	0.5766	-0.1664 i	0.6001	0.5720	-0.1843 i	0.6009
	-0.6	0.5360	-0.1602 i	0.5694	0.5337	-0.1685 i	0.5696
	-0.8	0.5103	-0.1572 i	0.5340	0.5120	-0.1508 i	0.5337
	-1.0	0.5015	-0.1563 i	0.5253	0.5050	-0.1433 i	0.5249

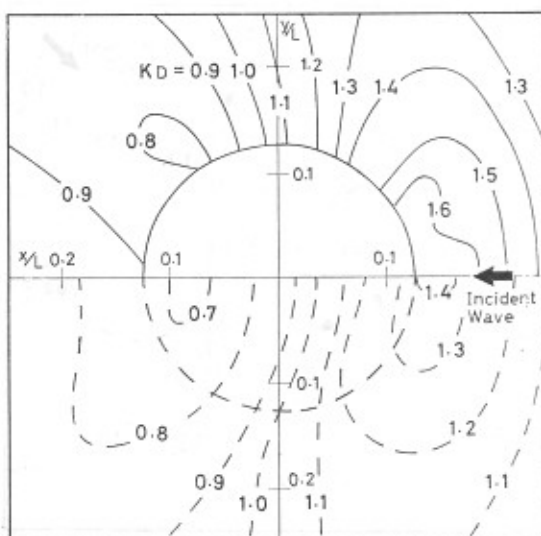
(ii) Continuity of fluid velocity

16	0.0	-0.2741	+0.6856 i	0.7384	-0.3199	+0.6651 i	0.7380
	-0.2	-0.2397	+0.6012 i	0.6472	-0.2351	+0.6036 i	0.6478
	-0.4	-0.1956	+0.4950 i	0.5323	-0.1771	+0.5028 i	0.5331
	-0.6	-0.1515	+0.3901 i	0.4185	-0.1427	+0.3936 i	0.4186
	-0.8	-0.1191	+0.3129 i	0.3348	-0.1257	+0.3102 i	0.3346
	-1.0	-0.1071	+0.2846 i	0.3041	-0.1207	+0.2790 i	0.3040
8	0.0	0.3251	+0.0885 i	0.3370	0.3188	+0.1089 i	0.3369
	-0.2	0.3096	+0.0859 i	0.3213	0.3105	+0.0835 i	0.3215
	-0.4	0.3217	+0.0932 i	0.3349	0.3238	+0.0854 i	0.3349
	-0.6	0.3474	+0.1050 i	0.3629	0.3482	+0.1016 i	0.3627
	-0.8	0.3710	+0.1153 i	0.3885	0.3702	+0.1181 i	0.3886
	-1.0	0.3804	+0.1193 i	0.3986	0.3789	+0.1248 i	0.3990

Table 4 Calculated Results for Forces and Moments

Shape	Circle	Ellipse		Rectangle			Remarks	
Cross-sectional Area	πb^2	$\pi b^2/2$		$2b^2$				
Angle of Incidence	0°	0°	45°	90°	0°	45°	90°	
$\sigma^2 h/g=0.25 \quad kb=0.522$								
F_x	2.768	2.270	1.586	0	3.159	2.204	0	Imper. Permeable
$\rho g \zeta_0 h^2$	2.049	1.328	0.927	0	1.670	1.162	0	
F_y	0	0	0.767	1.071	0	1.019	1.406	Imper. Permeable
$\rho g \zeta_0 h^2$	0	0	0.658	0.918	0	0.888	1.232	
$\sigma^2 h/g=0.50 \quad kb=0.772$								
F_x	3.221	3.001	2.067	0	3.880	2.669	0	Imper. Permeable
$\rho g \zeta_0 h^2$	2.415	1.700	1.171	0	2.099	1.428	0	
F_y	0	0	0.972	1.337	0	1.271	1.706	Imper. Permeable
$\rho g \zeta_0 h^2$	0	0	0.833	1.146	0	1.072	1.462	
$T_x/\rho g \zeta_0 h^3$	0	0	0.167	0.229	0	0.218	0.292	Imper.
$T_y/\rho g \zeta_0 h^3$	0.552	0.514	0.354	0	0.665	0.457	0	
$T_z/\rho g \zeta_0 h^3$	0	0	0.191	0	0	0.305	0	
$\sigma^2 h/g=1.0 \quad kb=1.20$								
F_x	2.774	3.047	2.022	0	3.552	2.368	0	Imper. Permeable
$\rho g \zeta_0 h^2$	2.178	1.830	1.212	0	2.158	1.390	0	
F_y	0	0	1.014	1.336	0	1.268	1.548	Imper. Permeable
$\rho g \zeta_0 h^2$	0	0	0.880	1.159	0	1.087	1.331	
$T_x/\rho g \zeta_0 h^3$	0	0	0.031	0.041	0	0.039	0.048	Imper.
$T_y/\rho g \zeta_0 h^3$	0.085	0.094	0.062	0	0.109	0.073	0	
$T_z/\rho g \zeta_0 h^3$	0	0	0.249	0	0	0.388	0	

(2.43) および式(3.5)、(3.6)により波高分布と堤体に作用する波圧の合力と堤体中心(0, 0, $-h/2$)に関するモーメントを計算した結果を示すとTable 4のようである。この場合透過堤に対しては $V=0.5$ 、 $\mu V/\sigma=1.0$ とし、 n について1、 s について2までの項を取っている。



$\sigma^2 h/g=0.5 \quad Kh=0.772 \quad b/h=1.0 \quad a/b=1.0$

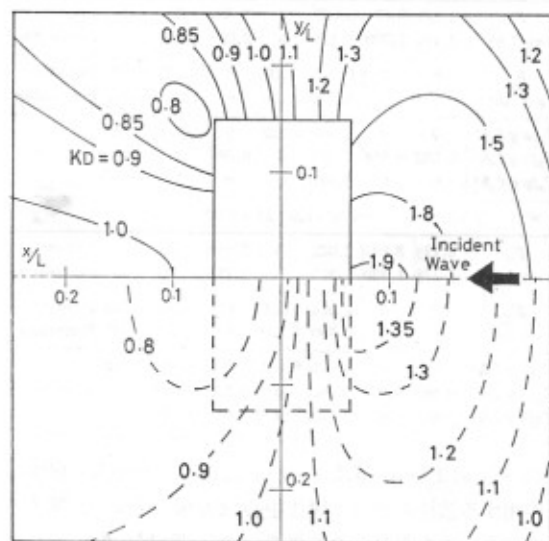
Distribution of KD for Circle

Fig. 3

(4) 波高分布

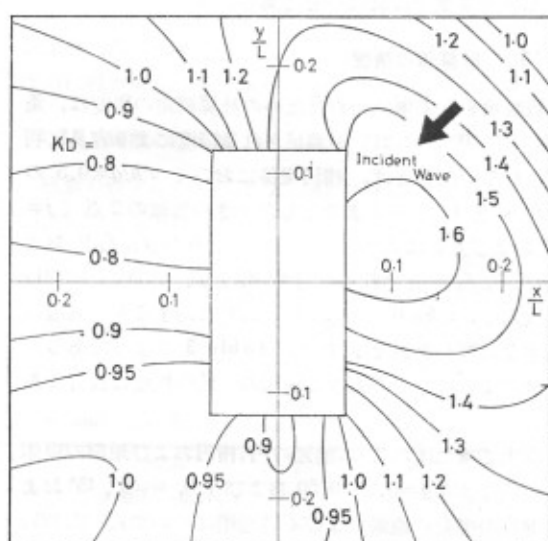
Fig. 3~6 は円および矩形堤体について $\sigma^2 h/g=0.5$ および 1.0 の場合の波高分布を示すもので、実線は不透過堤に対するもの、破線は透過堤に対するものである。 $\sigma^2 h/g=0.25, 0.50, 1.0$ に対する kh はそれぞれ 0.522, 0.772, 1.200, したがって、堤体長 $2b$ に対して波長はそれぞれ約 6 倍, 4 倍および 2.6 倍で堤長が波長に比べてかなり短い場合である。各図を見ると、不透過堤では

いずれの波向、波長に対しても円形の場合が背後の回折波は最も小さいが、透過堤では $\theta=0^\circ$ の波向で背後の回折波は最小となる、そして矩形の場合と楕円の場合の相異は非常に小さくなる。すなわち、不透過堤では隅角の影響が明らかに見られるが、透過堤ではそれは消滅の傾向が強い。また、透過堤では堤前の反射波も背後の回折波も小さくなる。すなわち、このような波長に比べて堤体長の短い回折波の影響の大きい場合には、背後の静穏のためには透過堤のほうが有利である、などのことがわ



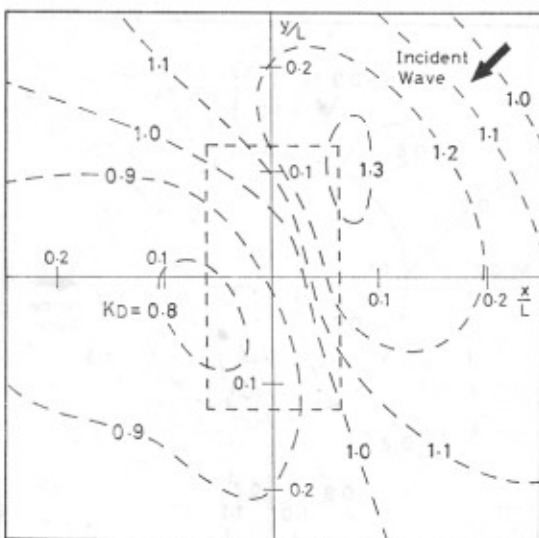
$\sigma^2 h/g=0.5$ $Kh=0.772$ $b/h=1.0$ $a/b=0.5$
Distribution of KD for Rectangle

Fig. 4 (a)



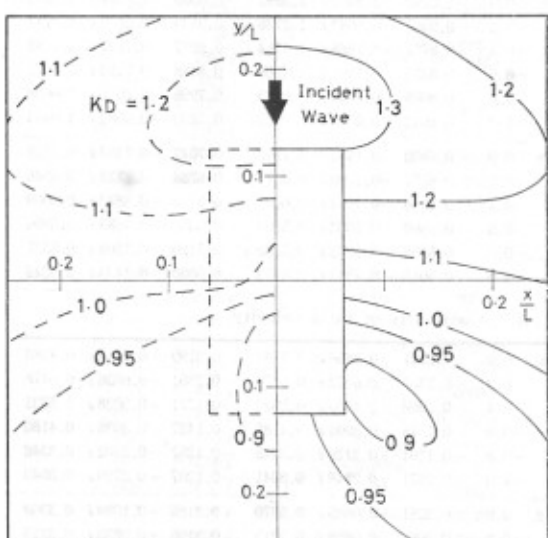
$\sigma^2 h/g=0.5$ $Kh=0.772$ $b/h=1.0$ $a/b=0.5$
Distribution of KD for Rectangle

Fig. 4 (b)



$\sigma^2 h/g=0.5$ $Kh=0.772$ $b/h=1.0$ $a/b=0.5$
Distribution of KD for Rectangle

Fig. 4 (c)



$\sigma^2 h/g=0.5$ $Kh=0.772$ $b/h=0.5$ $a/b=0.5$
Distribution of KD for Rectangle

Fig. 4 (d)

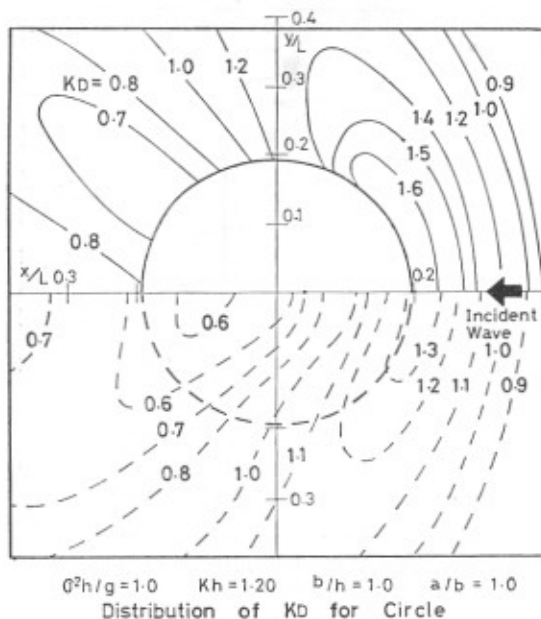


Fig. 5

かる。したがって、防波堤として見るときは、波長と堤体長の関係で、堤体背後の波高が等しくなるような透過堤と不透透堤の長さがあり、背後の静穏については、それ以上の長さでは不透透堤が有効であり、以下の長さでは透過堤が有利ということになる。なお、堤体幅が水深と等しく、無限に長い防波堤に波が垂直に入射するとき、 $a^2h/g=0.25, 0.5, 1.0$ に対しては反射率はそれぞれ 0.38, 0.46, 0.47, 透過率はそれぞれ 0.64, 0.56, 0.37 と計算される。

(5) 流体力

流体力の水平合力および堤体中心に関するモーメントの計算結果は Table 4 に示すようである。これらの値はそれぞれの絶対値で位相値は省略している。これによると $\omega=0^\circ$ のとき x 方向の投影面積は等しいが、水平合力は不透透堤では波長が長いときは矩形、円、楕円、波長が短いときは矩形、楕円、円の順に大きい。常に矩形の場合が大きいのは隅角部の影響と考えられる。透過堤では円、矩形、楕円の順で大きい、これは隅角の影響とともに入射波方向の堤幅の効果によると考えられる。このことは、 $\omega=45^\circ$ および 90° の場合常に矩形のほうが楕円より大きい力を示すことから隅角部の影響の大きいことがわかり、また堤幅が広いときは、狭い場合に比べて透過性による合力の低下が大きくないことから、堤幅が広いときは透過性の効果が現われなくなることがわかる。すなわち、一般に予想されるように、隅角部があるときはかなり波力は大きくなり、その影響は透過堤においても明らかに残っており、また堤幅をあまり厚くするときは、透過性による波力低減はあまり起こらなくなる。

なお、モーメントは不透透の場合についてだけ示したが、注目すべきは $\omega=45^\circ$ の場合、堤体中心に関する鉛直軸回りのモーメントがかなり大きいことである。

5. む す び

ここでは Green 関数を用いたポテンシャル接続法に

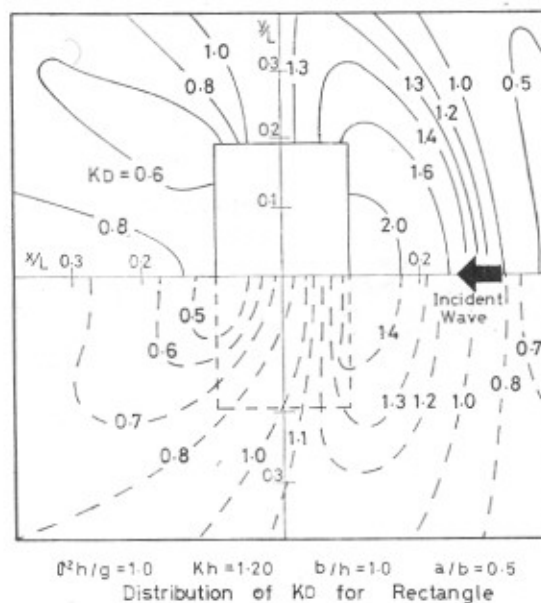


Fig. 6(a)

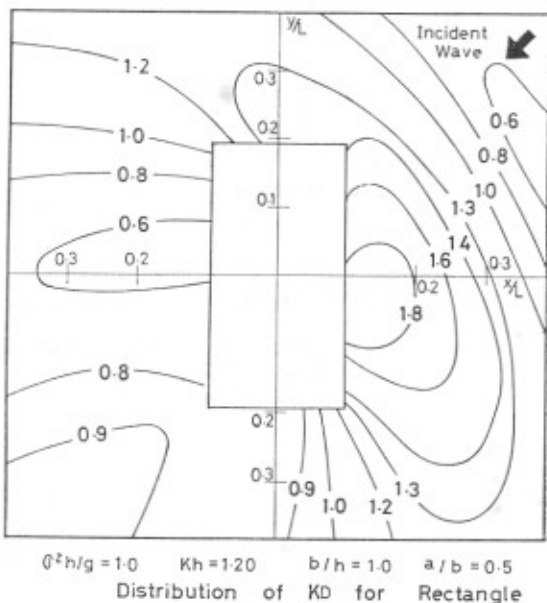
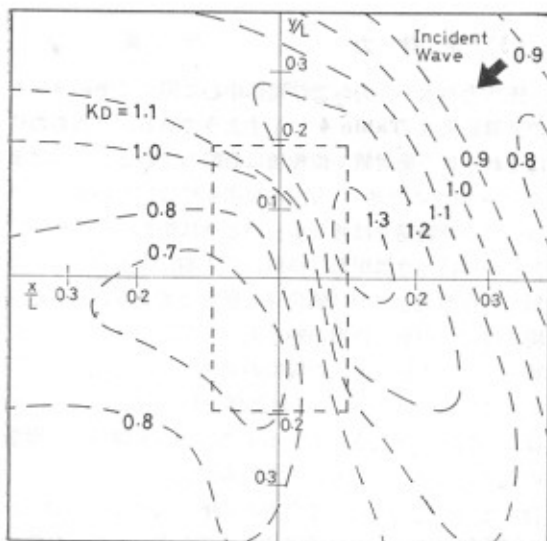
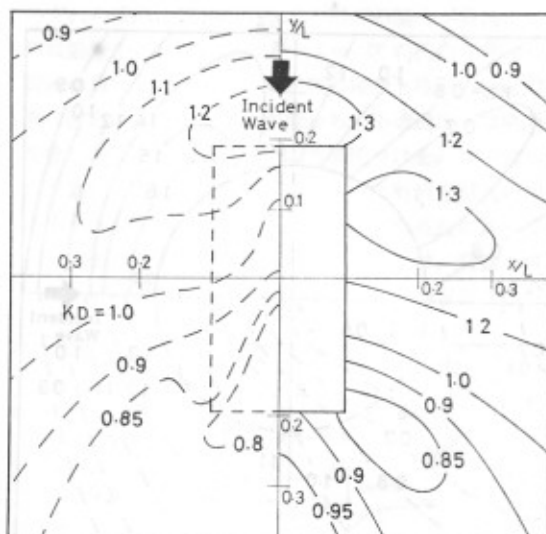


Fig. 6(b)



$0^2h/g = 1.0$ $Kh = 1.20$ $b/h = 1.0$ $a/b = 0.5$
Distribution of KD for Rectangle

Fig. 6(c)



$0^2h/g = 1.0$ $Kh = 1.20$ $b/h = 1.0$ $a/b = 0.5$
Distribution of KD for Rectangle

Fig. 6(d)

よって、任意の形の防波堤について透過と不透過にかかわらず理論解が得られることを述べ、その一例として便宜上、対称形状の防波堤についての計算結果を示した。この時透過性堤体については、流体抵抗が流速に比例すると仮定し、また $V=0.5$, $\mu V/\sigma=1.0$ とおいた。これらの仮定は計算の便宜上のためであるが、透過性堤体に関する著者の研究¹⁴⁾により妥当であることが認められる。また、 $0^2h/g=0.25$ に対する波高分布は前論文¹³⁾に示されており、 $0^2h/g=0.50$ および 1.0 に対する楕円の場合の分布は紙数の都合上省略した。

ここに述べた方法は防波堤に限らず、透過性の護岸や防波堤などの組合せに対しても適用され、さらにこの方法の原理は、任意形状の全没水または半没水柱状体についても用いられる。これらについては次の機会に述べることとする。

参考文献

- 1) たとえば Penny, W.G. and A.T. Price: The Diffraction Theory of Sea Waves and the Shelter afforded by Breakwater, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, Vol. 244, 1952.
- 2) 合田良実・吉村知司: 島堤による波の反射および回折に関する研究, 港湾技術研究所報告, 第10巻, 第2号,

1971.

- 3) 伊藤喜行・谷村勝利: 新しい方法による波動の数値解析, 同上, 1971.
- 4) 井島武士・江口泰彦・小林 彰: 透過性防波堤と岸壁に関する研究, 土木学会第18回海岸工学論文集, 1971.
- 5) 井島武士: 海岸工学, pp. 20~25, 朝倉書店, 1970.
- 6) 4) に同じ
- 7) John, Fritz: On the Motion of Floating Bodies II, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. III No. 1~4, pp. 45~100, 1950.
- 8) たとえば 宇野利雄・洪延植: ポテンシャル, pp. 42~49, 培風館, 新数学シリーズ, 1961.
- 9) 4) に同じ
- 10) Lee, Jiin-Jen: Wave-induced Oscillations in Harbors of Arbitrary Shape, Calif. Inst. for Technology, 1970.
- 11) Hwang, Li-San and E.O. Tuck: On the Oscillations of Harbours of Arbitrary Shape, J. Fluid Mech. Vol. 42, Part 3, 1970.
- 12) 5) に同じ
- 13) 井島武士・周 宗仁・湯村やす・田淵勝修: 任意形状の透過および不透過防波堤による波の散乱と流体力, 第20回海岸工学論文集, 1973.
- 14) 井島武士・奥蘭英明・坂井久雄: 二層透過性または遊水部をもつ直立消波護岸の理論と実験, 第20回海岸工学論文集, 1973.