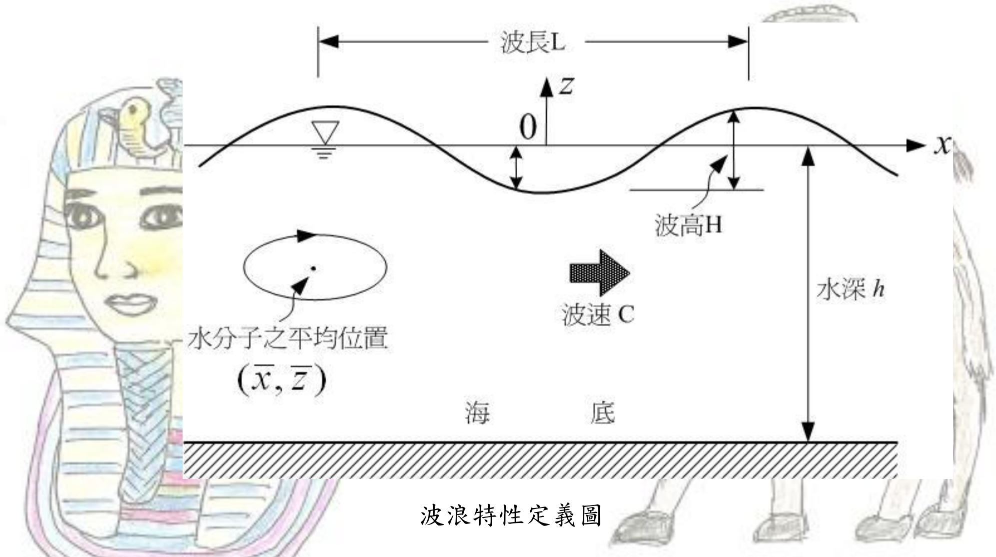
等水深海域微小振幅波通解

(Small amplitude wave in constant finite depth)



波浪特性定義圖

水深 h 為一定時，海底邊界條件為

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n}=\frac{\partial \Phi}{\partial z}=0$$

微小振幅波的速度勢Φ應為滿足靜水面上線性動力邊界條件及線性運動邊界條件的 Laplace 方程式的解。

一定角頻率σ(＝2π/T)的 2 維表面進行波速度勢Φ(x，z；t)可下列形式表示。

$$\Phi(x,z;t)=\phi(x,z)\,e^{i\sigma t}$$

由於假定水深 h 一定，可利用變數分離法將Φ(x，z)以 x 的函數 X(x)及 z 的函數 Z(z)的乘積形式表示如下

$$\Phi(x,z;t)=X(x)\,Z(z)\,e^{i\sigma t}$$

將上式代入下列連續方程式(Laplace 方程式)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}=0$$

得

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}=-\frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}$$

載滿貨品的驢子

由於 X，Z 為獨立變數，上式左邊為 x，右邊為 z 的函數，由於 2 者恆等，必可與某一和 x、z 無關的常數相等。令此常數為 k^2，可得

$$\frac{d^2 X}{dx^2}+k^2 X=0$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2}+k^2Z=0$$

k^2 可為正數或負數，k 可為實數或虛數，上式通解可以下式表示

$$Z=A\cosh kz\ +\ B\sinh kz$$

將上式以 $\Phi(x,z;t)=X(x)\,Z(z)\,e^{i\sigma t}$ 的形式，代入不透水海底邊界條件式，得

$$Z(z)=A\frac{\cosh\ k(z+h)}{\cosh\ kh}$$

將上式依 $\Phi(x,z;t)=X(x)\,Z(z)\,e^{i\sigma t}$ 的形式，代入下式速度勢 Φ 在靜水面線性邊界條件

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+g\ \frac{\partial\Phi}{\partial z}=0$$

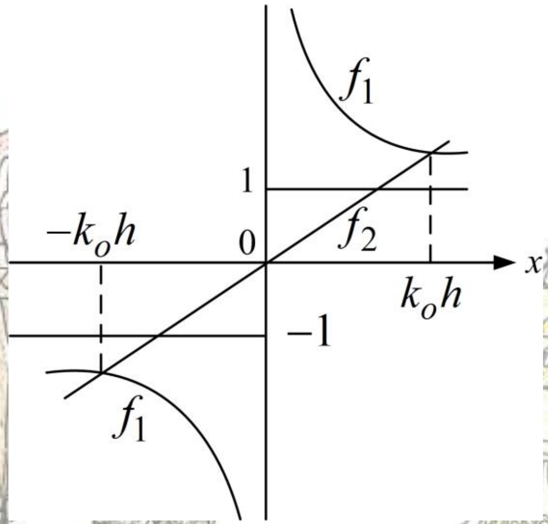
得

$$kh\tanh\ kh=\sigma^2 h/g$$

上式稱為波分散關係式，是說明波浪物理特性的重要公式。在已知水深 h 及角頻率 σ 時，可決定周波數 k(網上計算)，即當分散關係存在時，角頻率 σ、水深 h、和周波數 k 間，有對應關係存在。

如上所述，k 可為實數或虛數。

1. k 為實數時



k 為實數

如上圖，上述分散關係式解為下列 2 方程式的交點

$$f_1\ =\ \coth\ kh$$

$$f_2\ =\ \frac{1}{\sigma^2\ h/g}\ kh$$

即只有 $kh\ =\ \pm\ k_0h$ 2 解，當 $\sigma^2 h/g$ 大時

$$k_0h \approx \sigma^2h/g$$

由於分散關係式為超越方程式，必要以數值計算求其近似解。通常都以 σ^2h/g 值作為第 1 近似值，依牛頓近似法逐次代入 $k_0h=\sigma^2h/g\ \coth k_0h$ 的右邊，即可得正確值。因此當 k_0 為實數時，分散關係式為

$$k_0h\tanh k_0h=\sigma^2h/g$$

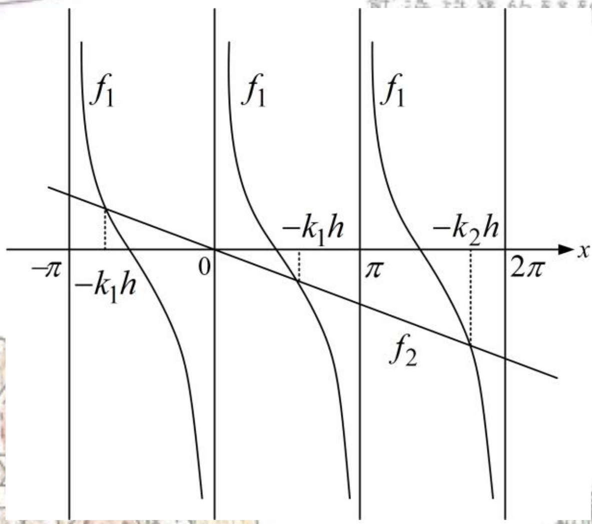
對此 k_0h 值，對應的 Z(z)函數可以下式表示

$$Z_0(z)=A_0\frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0h}$$

2. k 為虛數時

分散關係式 $kh\tanh kh=\sigma^2h/g$ 中，以 ik 取代 k 值，得

$$-kh\tan kh=\sigma^2h/g$$



k 為虛數

上式的解，如上圖，為下列 2 組方程式的交點

$$f_1=\cot kh$$

$$f_2=-\frac{1}{\sigma^2h/g}kh$$

即有無限組正負解，由於 cot 為偶函數，只考量正解即可，以 k_nh（n=1、2、3…）表示，由圖可知，k_nh 一定小於 $n\pi$，當 n 大時

$$k_nh\approx n\pi-\frac{\sigma^2h/g}{n\pi}$$

故對虛數 k 值，其對應 Z(z)函數為

$$Z_n(z) = A_n \frac{\cos k_n (z+h)}{\cos k_n h} \qquad (n=1,2,3....,\infty)$$

因此對已知 k 值，可由下式決定 X(x)函數。

$$\frac{d^2X}{dx^2} + k^2 X = 0$$

載滿珠寶的駱駝

k 為實數時

$$X_0 = C_0 e^{i k_0 x} + D_0 e^{-i k_0 x}$$

對虛數 k_n 值

$$X_n = C_n e^{k_n x} + D_n e^{-k_n x} \qquad (n = 1, 2, 3, ...\infty)$$

因此等水深域的速度勢Φ(x，z ；t)通式(一般解)可以下列方程式表示

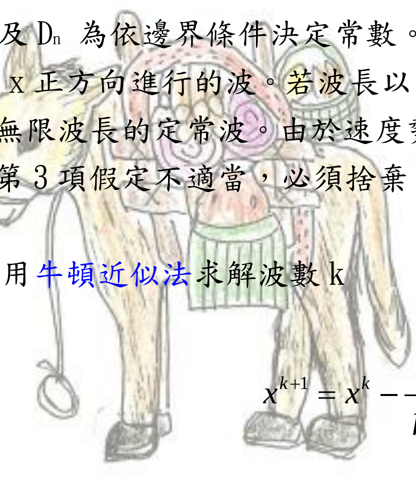
$$\Phi(x,z;t)=$$

$$A \frac{\cosh k_0 (z+h)}{\cosh k_0 h} e^{i(k_0 x + \sigma t)} + B \frac{\cosh k_0 (z+h)}{\cosh k_0 h} e^{-i(k_0 x - \sigma t)}$$

2011 埃及尼羅河之旅

$$+\sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{\cos k_n (z+h)}{\cos k_n h} e^{(k_n x + i\sigma t)} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{\cos k_n (z+h)}{\cos k_n h} e^{-(k_n x - i\sigma t)}$$

A、B、C_n及 D_n 為依邊界條件決定常數。第 1 項表示向 x 負方向進行的波，第 2 項表示向 x 正方向進行的波。若波長以 L 表示，則 k=2π/L 表示波數，第 3 及第 4 項表示無限波長的定常波。由於速度勢Φ在 x→±∞必須為有界的條件，對 x>0 領域，第 3 項假定不適當，必須捨棄。對 x<0 領域，必須捨棄第 4 項。



問題　利用牛頓近似法求解波數 k

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$$

載滿貨品的驢子　　阿拉丁神燈

回海岸水力學　回分類索引　回海洋工作站