

不規則波波高分布

水面變位若可以正弦波的無限和表示，平均水面上某一高度 ζ 處發生極大值的機率為



$$\begin{aligned} 0 \leq \zeta < +\infty \\ \partial \zeta / \partial t = 0 \\ \partial^2 \zeta / \partial t^2 < 0 \end{aligned}$$



等 3 個條件同時出現時的機率。依 [Cartwright 及 Longuet-Higgins](#) 得

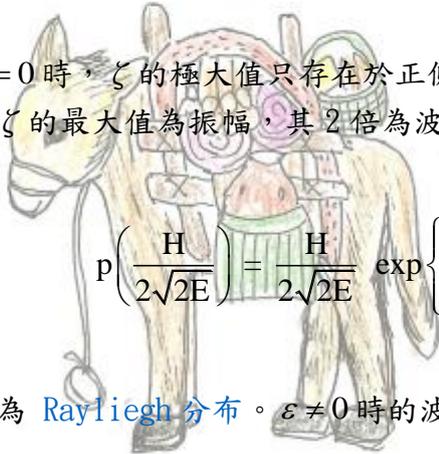
$$p(\zeta/\sqrt{E}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \varepsilon \exp \left[-\frac{1}{2\varepsilon^2} (\zeta/\sqrt{E})^2 \right] + (1-\varepsilon^2)^{1/2} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{E}} \right) \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{E}} \right)^2 \right] \int_{-\infty}^{\frac{\zeta}{\sqrt{E}}} \frac{(1-\varepsilon^2)^{1/2}}{\sqrt{E}} \exp \left(-\frac{1}{2} X^2 \right) dx \right\}$$

(1)

E 為下式所示能量， ε^2 為波譜寬度埃及尼羅河之旅

$$E = \overline{\zeta^2} \approx \frac{1}{2N} \sum_{m=0}^{2N-1} \zeta_m^2 \approx \sum 2|C_k|^2 \approx \sum w_1(f) df$$

$\varepsilon = 0$ 時， ζ 的極大值只存在於正側，線性理論成立範圍內，由於波形上下對稱， ζ 的最大值為振幅，其 2 倍為波高 H ，其機率分布為



$$p \left(\frac{H}{2\sqrt{2E}} \right) = \frac{H}{2\sqrt{2E}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{H}{2\sqrt{2E}} \right)^2 \right\}$$



上式稱為 [Rayleigh 分布](#)。 $\varepsilon \neq 0$ 時的波高分布，目前尚無理論解。

① 1/n 最大值貨品的驢子

阿拉丁神燈

比某 ζ' 更大的極大值的出現機率 $q(\zeta'/\sqrt{E})$ 為，將(1)式對大於 ζ' 的範圍加

以積分即可求得，為方便起見將 ζ'/\sqrt{E} 以 ζ' 取代，則

$$q(\zeta') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{\zeta'/\varepsilon}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} x^2\right) dx + (1-\varepsilon^2)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \zeta'\right) \int_{-\infty}^{\zeta \frac{(1-\varepsilon^2)^{1/2}}{\varepsilon}} \exp\left(-\frac{1}{2} x^2\right) dx \right\} \quad (2)$$

所謂 $1/n$ 最大值 $\zeta^{(1/n)}$ 者為，超過某一 ζ' 值的機率為 $1/n$ 時的全部 ζ 的平均值，即

$$\zeta^{(1/n)} = \frac{1}{1/n} \int_{\zeta'}^{\infty} p(\zeta) \zeta d\zeta$$

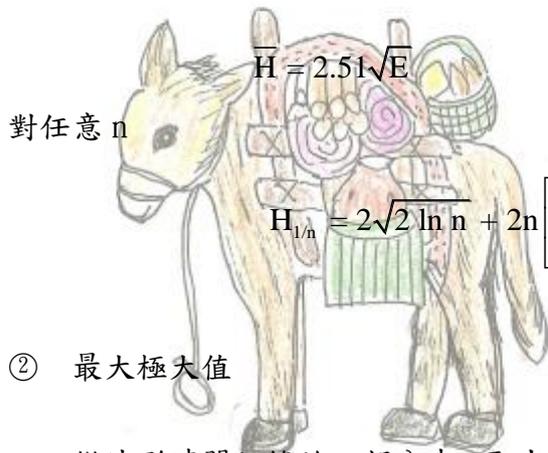
積分下限 ζ' 為

$$\frac{1}{n} = \int_{\zeta'}^{\infty} p(\zeta) d\zeta$$

通常 $\zeta^{(1/n)}$ 隨波譜寬度 ε 而變，當 $\varepsilon=0$ 時，因波高為振幅的 2 倍，得

$$H_{1/10} = 5.09\sqrt{E} \quad \text{2011 埃及尼羅河之旅}$$

$$H_{1/3} = 4.00\sqrt{E}$$



對任意 n

$$\bar{H} = 2.51\sqrt{E}$$

$$H_{1/n} = 2\sqrt{2 \ln n} + 2n \left[\sqrt{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\sqrt{\ln n}} \exp(-\theta^2) d\theta \right]$$

② 最大極大值

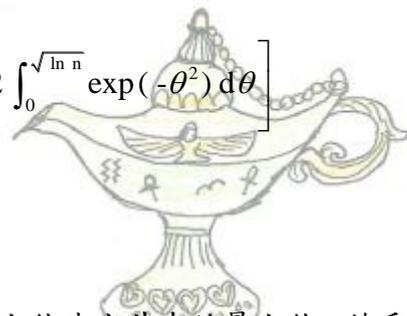
從波形時間記錄的一部分中，取出 N 個極大值決定其中的最大值，若重複若干次時，可求得最容易出現的最大值 $\bar{\zeta}_{\max}$ 如下。

在某次取樣中的任意值，不超過某值 r 的機率由(2)式可知應為 $1-q(r)$ ， N 個均為不超過 r 的機率為 $[1-q(r)]^N$ ，所以至少 1 個超過 r 的機率為 $[1-q(r)]^N$ 。

最大極大值 $\bar{\zeta}_{\max}$ 在 $(r, r+dr)$ 間的機率為至少 1 個超過 r 的機率減去至少 1



載滿珠寶的駱駝



阿拉丁神燈

個超過 $r + dr$ 的機率，即

$$\left\{ 1 - [1 - q(r)]^N \right\} - \left\{ [1 - q(r)]^N + d(1 - [1 - q(r)]^N) \right\}$$

$$= -d(1 - [1 - q(r)]^N) = d[1 - q(r)]^N$$

將上述取樣重複數次得 ζ_{\max} 的平均值 $\bar{\zeta}_{\max}$ 如下

$$\bar{\zeta}_{\max} = E[\zeta_{\max}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta d[1 - q(r)]^N$$

當 N 的個數極多， ε 不趨近於 1 時，上式可近似為

$$\frac{\bar{\zeta}_{\max} / \sqrt{E}}{(2 - \varepsilon^2)^{1/2}} \approx \frac{\left[\ln(1 - \varepsilon^2)^{1/2} N + \gamma \left[\ln(1 - \varepsilon^2)^{1/2} N \right]^{-1/2} \right]}{(1 - \varepsilon^2 / 2)^{1/2}}$$

2011 埃及尼羅河之旅

$\gamma = 0.5772 \dots$ (Euler 常數)。

$\varepsilon \rightarrow 0$ 時， $\bar{\zeta}_{\max} = H_{\max} / 2$ ，得

$$\frac{H_{\max}}{2\sqrt{2E}} \approx [\ln N]^{1/2} + \frac{\gamma}{2} [\ln N]^{-1/2}$$

回海岸水力學

回分類索引

回海洋工作站

載滿貨品的驢子

阿拉丁神燈

