海面水位模擬

海面水位數值模擬方法有若干種，將說明重疊法(wave superposition)及線性濾過器(linear filter)法等 2 種比較基本方法。這 2 種方法會產生平均為零的 Gaussian 機率過程，並以某初期特定函數作為其波譜密度，此初期特定函數稱為目標波譜密度(target spectral density)，從模擬的時間序列數據中，預測得到的波譜密度稱為實際波譜密度(realized spectral density)，通常目標波譜密度可由理論曲線或從實際海面水位記錄推算的波譜密度加以決定。

1） 重疊法

目標波譜密度以 $w_1(f)$ 表示，F 為最大頻率(cycles/sec)，當 f 大於 F 時，等於零，令

$$0 = f_0 \langle f_1 \langle f_2 \langle \cdots\cdots \langle f_n = F$$

$$\Delta f_n = f_n - f_{n-1}$$

$$\overline{f_n} = (f_n + f_{n-1})/2$$

水面高度 $\zeta(t)$ 可以下式表示

$$\zeta(t) = 2\sum_{n=1}^{N}\sqrt{w(f_n)\,\Delta f_n}\ \cos(k_n x - 2\pi\overline{f_n} + \varepsilon_n) \qquad (A)$$

ε_n(n = 1, 2, 3, 4, …, N)為獨立任意變數，在 0 ~ 2π 間作均一分布，可由模擬亂數(pseudo-random number)決定。k_n 為下列方程式的根

$$2\pi\,\overline{f_n}^{\,2} = k_n g \tanh k_n h$$

h 表示水深。

(A)式所示 $\zeta(t)$ 表示平均為零，波譜密度為 $w_1(f)$ 的 Gaussian 機率分布過程，當 n 增加，即 Δf_n 減少時，會提高其精度。

數值模擬係將若干個波加以重合，每個波有任意相位，並具有符合目標波譜密度能量的振幅，因此(A)式是下式所示海洋風波模擬積分(psuedo-integral)表示的差分近似

$$\zeta(t) = 2\int_0^{\infty} \sqrt{w_1(f)\,df}\,\cos(\,kx - 2\pi ft\,) + \varepsilon$$

令 $\Delta f_n = F/N$，將頻率軸作等分割時，會使 $\xi(t)$ 以 $1/\Delta f_n$ 的週期反覆出現，為避免此週期性反覆出現，有若干種方法可解決。本節將說明使每個成分波均具有等能量的方法。波譜密度累加值，若以下式表示

$$w_1 = 2\int_0^{f} w_1(f')\,df'$$

則

$$w_1(f_n) \approx \left[w_1(f_n) - w_1(f_{n-1})\right] / 2$$

(A)式可改寫成

$$\zeta(t)=\sqrt{2}\sum_{n=1}^{N}\sqrt{w_1(f_n)-w_1(f_{n-1})}\,\cos(kx-2\pi f_n t+\varepsilon_n)$$

Δf_n 係依能使能量作等分的下列方程式而定

$$w_1(f_n) = \frac{n}{N}\, w_1\left(f_\infty\right)$$

當 $w_1(f)$ 選定 Bretschneider-Pierson 波譜密度作為理論模式時，上式非常容易被解出，因

$$w_1(f) = A\,B\,f^{-5}\,e^{-B/f^4}$$

將上式直接積分得

$$w_1(f) = 2\int_0^{f} AB\,f'^{-5} e^{-B/f^4}\,df' = \frac{A}{2}\left\{e^{-B/f'^4}\right\} = \frac{A}{2}e^{-B/f^4}$$

即

$$w_1(f_\infty) = A/2$$

$$f_n = \left[B / \ln\left(N/n\right)\right]^{1/4}$$

常數 A 及 B 由實測紀錄決定。

2） 線形濾波器

令 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 為任意輸入序列，$a_{-N}, a_{-N+1}, \cdots, a_{N-1}, a_N$ 為任意特定常數序列稱為數值濾過器(digital filter)，輸入序列$\{x_n\}$經過數值濾波器$\{a_n\}$而得的輸入序列$\{y_k\}$，可依下式表示

$$y_k = \sum_{n=-N}^{N} a_n x_{k-n} \quad , \quad k=N+1,N+2,N+3\cdots\cdots \qquad (A)$$

數值濾波器$\{a_n\}$值選定會使輸出序列$\{y_k\}$具有特定特質，設計數值濾波器只要從 Fourier 變換理論的基本關係著手，即可容易設計出來。

當具有核(kernal)的線性積分演算子 $k(\tau)$ 作用於輸入 $x(t)$，產生輸出 $y(t)$ 時，其關係可以下式表示

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau \qquad (B)$$

輸入及輸出均為實數時，核函數亦為實函數，其 Fourier 變換為

$$K(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2if\pi\tau}\, k(\tau)\, d\tau \qquad (C)$$

$K(f)$ 稱為線性演算子的系統函數(system function)，因

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

(C)式可改寫成

$$K(f)= \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau \cos 2f\pi\tau d\tau - i\int_{-\infty}^{\infty} k(\tau)\sin 2f\pi\tau d\tau$$

$K(f)$ 實數部對 f=0 為對稱，虛數部為反對稱。由(B)式得 $x(t)$ 與 $y(t)$ 的波譜密度間，有下列關係

$$w_{1yy}(f) = |k(f)|^2\, w_{1xx}(f)$$

$$w_{1xy}(f) = k(f)\, w_{1xx}(f)$$

x(t)是平均為零的常態分布時，y(t)亦具有同樣性質。欲使數值濾波器為線性積分演算子，選用 Dirac 函數即可，若 y_k 及 x_n 與 y(t)及 x(t)間的關係如下

$$y_K = y(k\Delta t)\ ,\ k=0,1,2\ \cdots$$

$$x_n = x(n\Delta t)\ ,\ n=0,1,2\ \cdots$$

則(A)式可改寫成

$$y(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n\ x(t - n\Delta t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{n=-N}^{N} a_n \delta(\tau - n\Delta t) \right\} x(t - \tau)\, d\tau\ ,t = 0,\Delta t,2\Delta t\ \cdots$$

數值濾波器的核 $\overline{k}(\tau)$ 為

$$\overline{K}(\tau) = \sum_{n=-N}^{N} a_n \delta(\tau - n\Delta t)$$

系統函數 $\overline{K}(f)$ 為

$$\overline{K}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i f \tau}\ \overline{k}(\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i f \tau} \sum_{n=-N}^{N} a_n \delta(\tau - n\Delta t)\, d\tau$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} a_n\ e^{-2\pi i f_n}$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} \left\{ \frac{a_n + a_{-n}}{2} + \frac{a_n - a_{-n}}{2} \right\} e^{-2\pi i f n(2\Delta t)}$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} [A_n + B_n]\ e^{-i\pi n f / F}$$

$$A_n = a_n + a_{-n} / 2$$

$$B_n = a_n - a_{-n} / 2$$

$$F = 1 / 2\Delta t$$

由於對稱關係得

$$A_n = A_{-n} \quad , \quad B_n = B_{-n}$$

即

$$\overline{K}(f) = A_0 + 2\sum_{n=1}^{N} A_n \left(e^{i\pi nf/F} + e^{-i\pi nf/F}\right)/2$$
$$- 2i \sum_{n=1}^{N} B_n \left(e^{i\pi nf/F} + e^{-i\pi nf/F}\right)/2i$$

因

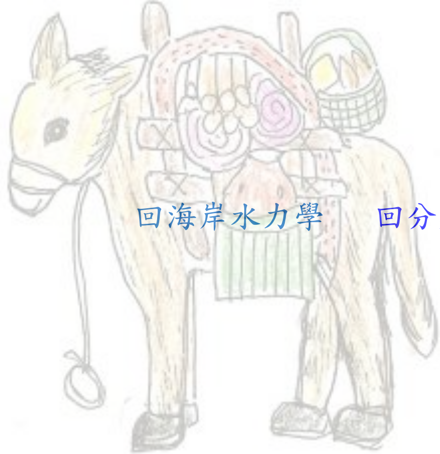
$$\cos\theta = \left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)/2 \quad , \quad \sin\theta = \left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)/2i$$

得

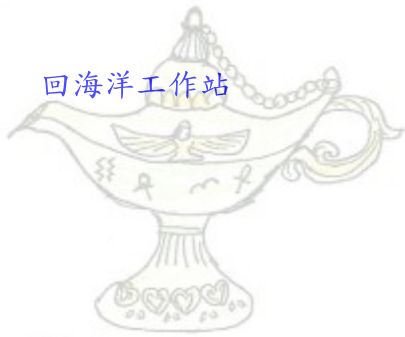
$$\overline{K}(f) = A_0 + 2\sum_{n=1}^{N} A_n \cos\left(\pi nf/F\right) - 2i \sum_{n=1}^{N} B_n \sin\left(\pi nf/F\right)$$

因此從上式，只要決定 A_n 及 B_n，就可近似設計出具有實數核的線性積分演算子，上式右邊的 2 級數均具有 2F 週期，N 很大時，在-F～F 間可得良好近似值，但在此區間外，K(f) 以 2F 週期反覆出現。F 很大時，頻率大於 F 的濾波器反應在工程應用上不會有很大影響，因此 K(f) 週期性在實用上不會發生問題。A_n 及 B_n 係按一般 Fourier 級數決定常數的計算方法即可。

回海岸水力學　回分類索引　回海洋工作站



載滿貨品的驢子



阿拉丁神燈