

# 港灣海岸水工模型固定床實驗相似

## 1. 概說

流體運動主要影響因素是**重力及黏性力**，2者均考量的流體稱為黏性流體，流體運動為考量剪力的**回轉運動**，控制方程式是下列所示 Navier-Stokes 運動方程式。

$$\rho \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + b_1$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + b_2$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + b_3$$

2011 埃及尼羅河之旅

流體粘性係數為  $\mu$  時，應力度可以下式表示

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$$

P 為壓力，Kronecker 的  $\delta_{ij}$  為

$$\begin{cases} i = j & \delta_{ij} = 1 \\ i \neq j & \delta_{ij} = 0 \end{cases} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

原型(prototype)與模型(model)力學相似時，運動方程式對應各項比必要成立，即

$$\frac{u_p / t_p}{u_m / t_m} = \frac{u_p^2 / X_p}{u_m^2 / X_m} = \frac{v_p u_p / y_p}{v_m u_m / y_m} = \frac{w_p u_p / Z_p}{w_m u_m / Z_m} = \frac{\rho_p / \rho_p X_p}{\rho_m / \rho_m X_m}$$

$$= \frac{v_p u_p / X_p^2}{v_m u_m / X_m^2} = \frac{v_p u_p / y_p^2}{v_m u_m / y_m^2} = \frac{v_p u_p / Z_p^2}{v_m u_m / Z_m^2}$$

$u$ 、 $v$ 、 $w$  分別為  $x$ 、 $y$ 、 $z$  方向速度成分， $p$  為壓力， $\nu$  為動黏性係數， $\rho$  為水密度，下註  $p$ 、 $m$  分別表示原型與模型。將上式組合可導出下列關係式。

$$\frac{u_p X_p}{V_p} = \frac{u_m X_m}{V_m}, \quad \frac{u_p Y_p}{V_p} = \frac{u_m Y_m}{V_m}, \quad \frac{u_p Z_p}{V_p} = \frac{u_m Z_m}{V_m}$$

上式表示 Reynolds 數必要相等，即謂之為 Reynolds 相似律。長度代表值以  $\ell$ ，速度代表值以  $V$  表示時，上式得

$$\frac{V_p}{V_m} = \left( \frac{V_p}{V_m} \right) / \left( \frac{\ell_p}{\ell_m} \right)$$

因  $V = \ell / t$  得

$$\frac{t_p}{t_m} = \left( \frac{\ell_p}{\ell_m} \right)^2 / \left( \frac{V_p}{V_m} \right)$$

2011 埃及尼羅河之旅

上式說明 Reynolds 相似時，時間縮尺與長度、動黏性係數有關。另可組合出下列關係式。

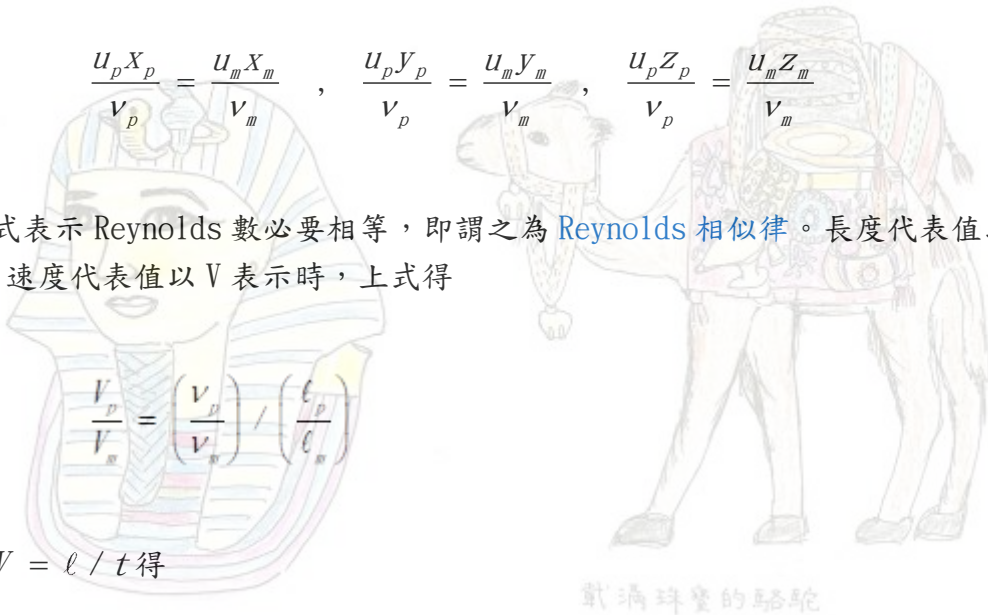
$$\frac{u_p W_p}{g X_p} = \frac{u_m W_m}{g X_m}, \quad \frac{v_p W_p}{g Y_p} = \frac{v_m W_m}{g Y_m}, \quad \frac{w_p^2}{g Z_p} = \frac{w_m^2}{g Z_m}$$

$g$ ：重力加速度

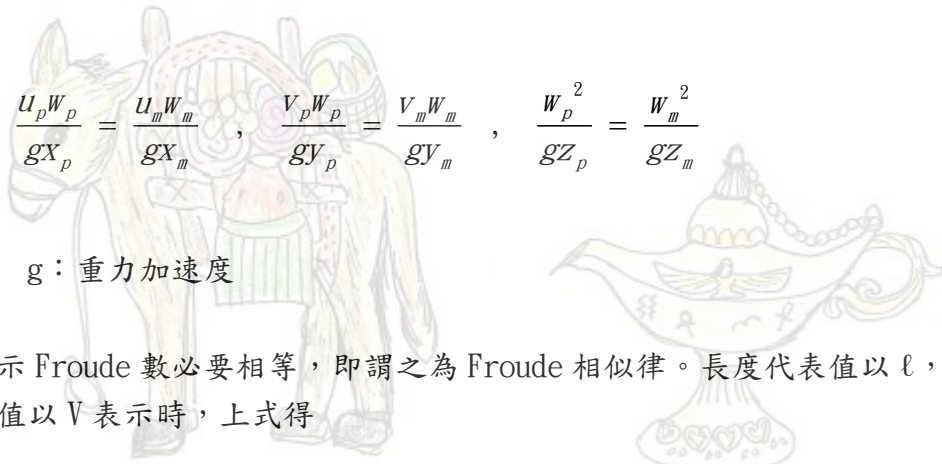
上式表示 Froude 數必要相等，即謂之為 Froude 相似律。長度代表值以  $\ell$ ，速度代表值以  $V$  表示時，上式得

$$\frac{V_p}{V_m} = \left( \frac{\ell_p}{\ell_m} \right)^{1/2}$$

即



載滿珠寶的駱駝



阿拉丁神燈

$$\frac{t_p}{t_m} = \left( \frac{\ell_p}{\ell_m} \right)^{1/2}$$

或

$$t_m = \frac{t_p}{\sqrt{\ell_p / \ell_m}}$$

水工模型實驗，欲同時滿足 Reynolds 相似律及 Froude 相似律的必要條件，依上述可知為

$$\frac{v_p}{v_m} = \left( \frac{\ell_p}{\ell_m} \right)^{3/2}$$

然一般水工模型實驗使用真水，即  $v_m \approx v_p$ ，意味著模型規模必要大致與實體大小相同，實際不可能，因此通常忽略 Reynolds 相似律，僅考量 Froude 相似律的模擬。

### 2011 埃及尼羅河之旅

固定床實驗，內部黏性及底床摩擦會造成波高衰減，以底床摩擦較為顯著。依據過往學者經驗，週期小時波高衰減效果增大，尤其是  $h/L_0 < 0.1$  的緩海底坡度淺海域，短週期波時底床摩擦引起波高衰減，不可忽略。

### 2. 碎波相似

進行海濱流實驗或動床實驗時，必然會遭遇碎波現象，目前碎波運動機制尚未明確，從運動方程式探討力學相似有困難。過往學者利用實驗發現，雖依波形尖銳度而異，通常波週期變短，碎波波高會有  $h_b/H_0$  變大，即碎波水深變深的趨勢，模型波週期  $< 0.7$  秒時，會出現週期影響，相似性將無法滿足。

### 3. 歪比模型相似

依 Navier-Stokes 方程式敘述的波運動，依相似律可得下列條件

$$\frac{X_p}{X_m} = \frac{Y_p}{Y_m} = \frac{Z_p}{Z_m}$$

即模型原則是不可以歪比。然而依下式所示波的淺化變形

$$\frac{H}{H_0} = \sqrt{\frac{1}{2n} \frac{C_0}{C}} = \left[ \left( 1 + \frac{4\pi h/L}{\sinh(4h\pi/L)} \right) \tanh \frac{2\pi h}{L} \right]^{-1/2}$$

及下式所示波的水深變化引起折射

$$\frac{H_2}{H_0} = \sqrt{\frac{C_0}{2n_2C_2}} \sqrt{\frac{b_0}{b_2}} = K_s \sqrt{\frac{b_0}{b_2}} = K_s K_R$$

得知，水深變化及折射引起波高變化，僅為  $h/L$  的函數，即將波長採用垂直縮尺時，將模型歪比，未嘗不可。對波的反射或繞射，因會受反射或繞射體形狀的影響，歪比模型會改變幾何學條件，無法利用歪比模型。由於實際海面波動現象，波的波高變化同時受折射、反射及繞射影響，這3個因素在實際海面波動幾乎不會單獨存在，結論為在固定床實驗歪比模型不可行。

移動床漂砂實驗的歪比模型，是基於不得已，可參照 [港灣海岸水工模型實驗歪比模型與輕質底質](#)。 2011 埃及尼羅河之旅



載滿貨品的驢子



阿拉丁神燈

回港灣海岸水工模型實驗